LEERLINGINTUÏSIES IN VERBAND MET HEELGETALREKENKUNDE

MARETH HUGO, B.A., B.Ed.

Tesis ingelewer ter gedeeltelike voldoening aan die vereistes vir die graad

MAGISTER IN DIE OPVOEDKUNDE

aan die

UNIVERSITEIT VAN STELLENBOSCH

STUDIELEIERS: **PROF. P.G.HUMAN**
MEV. J.C.MURRAY

MAART 1987

My hartlike dank aan die volgende persone:

Die Direkteur van Onderwys in Kaapland vir die toestemming om hierdie studie te onderneem.

Die Eenheid vir Navorsing oor Wiskunde-onderwys van die Universiteit van Stellenbosch vir hul gewaardeerde steun.

Prof. P.G. Human en Mev. J.C. Murray, my studieleiers vir hul onvermoeide leiding, hulp en tegemoetkomendheid.

Die skoolhoofde, onderwysers en leerlinge van die skole in Kimberley wat by hierdie ondersoek betrek is.

Marietjie Steyn en Ilsa Flemming vir keurige tikwerk.

VOORWOORD

Die navorsing wat hier gerapporteer word behels ´n empiriese ondersoek na leerlingintuïsies in verband met heelgetalrekenkunde, of dan meer spesifiek, die intuïtiewe hantering deur st.5- en st.6-leerlinge van negatiewe getalle as bewerkingsgetalle. Dit vorm deel van ´n groter projek wat onder leiding van Human en Murray as deel van die Eenheid vir Navorsing oor Wiskunde-onderwys van die Universiteit van Stellenbosch (ENWOUS) se navorsingsprogram uitgevoer word.

Heelgetalrekenkunde word wêreldwyd as ´n problematiese aspek van die Wiskunde-kurrikulum erken. Navorsers op die terrein sluit Alan Bell(Nottingham), Hans Freudenthal (Utrecht) en Fred Goffree (Enschede) in.

Die ondersoek wat hier gerapporteer word, het ten doel om die leerlingintuïsies wat op pre-onderrigvlak bestaan, te identifiseer en so ver moontlik te beskryf.

Hierdie ondersoek poog om inligting aan ander navorsers, beskikbaar te stel veral in die veld van onderrigstrategieë met betrekking tot heelgetalrekenkunde.

Dit is die ernstige begeerte van die navorser dat die resultate van hierdie ondersoek die lesers onder die indruk sal bring van die uniekheid en ryke geskakeerdheid van die denkprosesse van individuele leerlinge.

Alle name van leerlinge wat in hierdie verslag voorkom, is verander, maar verwys na gedokumenteerde gevalle.

Alle rekenaarverwerking is deur middel van die SPSS-pakket vir statistiese ontledings op die Universiteit van Stellenbosch se Sperry 1100/72 H2 hoofraamrekenaar gedoen.

PROLOOG

Onderhoud met 'n Standerd 6-leerling:

Hier volg kerngedeeltes van die onderhoud wat met Laurette (13 jaar) gevoer is, voordat sy onderrig in heelgetalrekenkunde ontvang het.
(Kyk Bylae B vir 'n volledige stel taakkaarte wat in die persoonlike onderhoude gebruik is).

4 - 9 = *5* (Sy kom onseker voor)

Daarna:

(1) 4 - 1 = *3*

(2) 4 - 2 = *2*

(3) 4 - 3 = *1*

(4) 4 - 4 = *0*

(5) 4 - 5 = *0 nee* **⁻1**

Sy bring die verbetering aan na 'n oomblik se nadenke.

Enkele oomblikke later volg:

1) 5 - 8 = *⁻3*

5 minus 5 is klaar nul. As jy nog 3 by vat, kry jy ⁻3.

2) ⁻8 - 3 = *11*

⁻8 is klaar in die minusse. Dan minus jy nog 3, dan kry jy ⁻11.

3) $7 - 7 = 0$

7 - 7 = 0, want die 7 (sy wys na die tweede 7) *is nie meer as die getal* (sy wys na die eerste 7) *nie.*

4) $7 + {}^{-}7 = 0$

As jy ⁻7 het en jy tel die getal by wat dieselfde as die minusgetal is, kry jy ook nul.

5) $3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$

5 is 2 meer as 3. As jy 3 van 5 vat, dan kry jy 0 as jy dit by 3 sit. Dan bly daar nog ⁻2 oor.

6) $5 + {}^{-}11 = {}^{-}6$

Vat 5 by ⁻11, dan kry jy .... Nee, koop nog 11 by 5 om by nul te kom, dan is 5 - 11 = ⁻6.

(Sy maak dus by (4), (5) en (6) gebruik van die inverse van ´n getal om die probleem te vereenvoudig, sonder dat sy dit as sulks besef.)

7) $8 + {}^{-}5 = 3$

$^{-}5$ is 5 onder nul. Vat 5 van 8 om by nul te kom, dan is daar 3 oor.

8) $10 + {}^{-}7 = 3$

Net soos (7)

9) $12 + {}^{-}7 = 5$

7
Net soos (9)

10) *$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = {}^{-}12$*

Almal is minusse. Plus al die minusse.

11) $^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8$

Net soos (10)

12) *$^{-}3 + {}^{-}5 = {}^{-}8$*

Net soos (11)

13) $3 \times {}^{-}6 = {}^{-}18$

$3 \times 6 = 18$. Sit dit in die minus.

14) $^{-}6 \times 3 = {}^{-}18$

Net soos (13)

15) $5 - {}^{-}18 = {}^{-}13$

Toe ek ´n verduideliking vra, trek sy dit dood. Sy het toe baie lank gedink en gesê sy wil eers aangaan.

Later het sy weer probeer. Sy wik en weeg baie lank en sê toe: *Ek kan nie nou dink nie.*

16) $^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$

Altwee is minusse.

17) $^{-}8 - {}^{-}3 = {}^{-}5$

Altwee is minusse.

18) $^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}13$

Altwee is minusse.

19) $^{-}7 - {}^{-}7 = {}^{-}14$

Altwee is minusse.

20) $^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}16$

Altwee is minusse.

Opmerkings

1. Haar verduideliking by nr.6 is uitsonderlik. Dit toon dat sy plasings en verskuiwings op die vertikale getallyn bemeester het.
Sy ly definitief nie aan die "kan-nie-´n-grote-van-´n-kleintjie-aftrek"- sindroom nie. Sy is nie net bereid om sulke bewerkings te doen nie, maar inisieer dit deur te sê: *Ek leen 11 by 5.* Sy funksioneer op ´n hoë abstrakte denkvlak.

2. Die verduideliking by nr. (16) - (20) dui op die volgende: Sy beskou - $^-$ as optel, daarom die antwoorde 7 ; 11 ens. Daarna vergeet sy of registreer nie dat die minusteken voor die tweede getal nou plus geword het nie, d.w.s. die bewerking is nou: $^-5 + 2$.
Sy beskou dit as $^-5 + {}^-2$.
Dus, 'n hoë abstrakte, formeel-logiese denkvlak, maar versteur deur lastige wanbegrippe.

3. Die vlak van verbalisasie is hoog en haar verduidelikings weldeurdag.

Hierdie getranskribeerde onderhoud verteenwoordig die suiwerste vorm van formele logika wat in die 137 onderhoude en die 20 opvolgonderhoude teëgekom is.

INHOUDSOPGAWE

HOOFSTUK 1

DIE WêRELD VAN HEELGETALLE

1.1 Die ENWOUS-Projek oor Heelgetalrekenkunde

Die ENWOUS-navorsingsprogram is gerig op die onderrig en leer van Wiskunde op skoolvlak. Die program akkomodeer verskeie temas in die Wiskundekurrikulum, onder andere heelgetalrekenkunde.

Die doelstellings van hierdie navorsing is om tot basiese kennis oor die spontane sowel as onderriggesteunde verwerwing van kennis oor die verskillende temas by te dra, en ook om spesifieke kennis ten opsigte van die volgende op te doen:

* die logiese, analogiese en funksionele samehange binne elke tema.
* die aard en voorkoms van spontane intuïsies;
* die aard en voorkoms van wanbegrippe en tipiese struikelblokke;
* fases in die bemeestering van bepaalde inhoude, en
* die tipiese effekte van verskillende onderrigmetodes en konsepsuele hulpmiddels.

Andersyds het hierdie navorsingsprogram ook ten doel die verbetering van die Wiskunde-kurrikulum deur middel van navorsingsgesteunde voorstelle en inligting aan kurrikuleerders en onderwysers.

Hierdie projekte behels normaalweg 'n teoretiese ontleding van logiese en funksionele samehange in 'n betrokke tema, informele gesprekke en taakgerigte onderhoude met 'n aantal leerlinge, die ontwikkeling en toepassing van skriftelike diagnostiese toetse en vertolking van die data, wat soms lei tot verdere onderhoude met die leerlinge en onderrig-eksperimente. (Vergelyk Derde Jaarverslag van ENWOUS, 1986.)

Ten opsigte van heelgetalrekenkunde word 'n navorsingsprojek vanaf 1983 deur Human en Murray geloods , om

* prestasie van hoërskoolleerlinge vir die verskillende bewerkings met heelgetalle te toets <u>nadat</u> hulle daarin onderrig is (Murray, 1984 en Van der Merwe, in die pers),

* aan die lig te bring watter gevalle problematies vir die leerlinge is (Murray, 1984,1986),

* prestasie van st.6- en laerskoolleerlinge te toets in bewerkings met heelgetalle <u>voordat</u>

hulle enige onderrig daarin ontvang het (Murray, 1986),

* vas te stel hoe laasgenoemde groep leerlinge die bewerkings met heelgetalle aanpak en uitvoer deur in 'n persoonlike onderhoud die leerling te vra om sy werkswyse te verduidelik, in die hoop dat intuïsies wat leerlinge mag hê aangaande bewerkings met negatiewe heelgetalle, sodoende aan die lig sal kom,

* sekere onderrigstrategieë, wat berus op bevindinge in verband met intuïsies, eksperimenteel aan te wend om bewerkings met negatiewe heelgetalle in die laerskool te onderrig. (Malan, 1986).

Die navorsingsprojek het tot dusver die volgende ingesluit:

* Die aflê van skriftelike toetse (Kyk Bylae A) deur 2590 respondente in st.6, 7 en 8. Die st.6-leerlinge was ten opsigte van negatiewe

heelgetalle nog in die pre-onderrig fase. Murray wou deur die skriftelike toetse wat deur st.6, 7 en 8-leerlinge afgelê is, vasstel hoe suksesvol die bewerkingsvaardighede met negatiewe getalle deur onderrig vasgelê is.

* 'n Empiriese ondersoek gekenmerk deur informele gevallestudies, asook skriftelike toetse, om intuïsies van leerlinge, in st.2 tot st.5, oor heelgetalle vas te stel. Murray het 46 informele persoonlike onderhoude gevoer met leerlinge in die senior primêre skoolfase. Sy wou deur die persoonlike onderhoude probeer vasstel hoe bevatlik die negatiewe getal as bewerkingsgetal vir leerlinge in die senior primêre skoolfase is.

Die volgende hipoteses is deur Murray se ondersoek gestaaf:

* Leerlinge in die senior primêre skoolfase beskik oor moontlikhede om bewerkings met heelgetalle te begryp.

* Dit dui daarop dat ´n aanbiedingstrategie waarin meer klem gelê word op inherente logika meer doeltreffend kan wees as ´n aanbieding in terme van semi-konkrete hulpmiddels(getallelyn, skuld) wat algemeen gebruik word.

* Die persentasie wins (d.w.s. die effek van ervaring en seleksie) van st.7 na st.8 in die volgende relatief *moeilike* gevalle is onbeduidend.

$^{-}a - {}^{-}b$: $a > b$; $({}^{-}5 - {}^{-}8)$: 3% wins

$^{-}a - b$: $b > a$; $({}^{-}8 - 3)$: 5% wins

$a - {}^{-}b$: $b > a$; $(8 - {}^{-}5)$: 2% wins

(Murray, 1984 : 14)

1.2 Die ondersoek wat hier gerapporteer word.

Die huidige studie was op twee enigsins onafhanklike doelwitte gerig.

* Om die empiriese ondersoekresultate van Murray ten opsigte van st.5- en 6-leerlinge se intuïsies ten opsigte van heelgetalle te kontroleer en aan te vul, deur ´n sistematiese ondersoek op ´n verteenwoordigende groep leerlinge te doen deur middel van persoonlike kliniese onderhoude.

  Murray se data oor die intuïsies van leerlinge ten opsigte van heelgetalrekenkunde is verkry uit 46 onderhoude met leerlinge uit sts.2 - 5. Die doel met die huidige ondersoek was om substansiële data oor die intuïsies van leerlinge op st.5 - 6 vlak te bekom, ten einde ´n beeld te probeer kry van die intuïsies wat beskikbaar is op die stadium dat heelgetalrekenkunde tans formeel onderrig word.

* Murray se data ten opsigte van die prestasie van st.7- en 8-leerlinge verwys na verskillende leerlinge in sts.7 en 8. Dit het ´n leemte gelaat en die doel van die huidige ondersoek was ook om hierdie ontbrekende data te bekom, dus: Om ´n longitudinale toetsbeeld te verkry, deur die geskrewe toetse wat st.7´s en st.8´s afgelê het, ´n jaar later te herhaal met dieselfde groep leerlinge nou in St.8 en 9 onderskeidelik.

Die empiriese ondersoek is uitgevoer in ´n ander omgewing as die van Murray, met leerlinge in ooreenstemmende standerds. Die ondersoekresultate is dus uit ´n ander kultuurmilieu.

1.2.1 <u>Die Veld van die Ondersoek</u>

Na aanleiding van die doelwitte van hierdie ondersoek, is die veld as volg bepaal:

a) Skriftelike toetse

i) Dieselfde toets wat deur Murray gebruik is, is ook in hierdie ondersoek gebruik (Kyk Bylae A).
514 st.7-leerlinge en 332 st.8-leerlinge het die toets afgelê.

ii) Dieselfde groep leerlinge het dieselfde toets 'n jaar later herhaal, om 'n longitudinale beeld te verskaf.

b) Persoonlike onderhoude:

Alle onderhoude is deur dieselfde persoon (die navorser) gevoer.
Die volgende leerlinge is betrek:

i) 80 st.6-leerlinge, verteenwoordigend van die st.6-klasse van twee hoërskole, **voordat** hulle onderrig ontvang in negatiewe heelgetalle.

ii) Al die st.5-leerlinge van twee laerskole, onderskeidelik 39 en 58.

iii) 20 van die st.5-leerlinge is na ses maande vir 'n tweede keer betrek om die effek van tydsverloop te bepaal.

1.3 Verbandhoudende navorsing

Navorsers op die gebied van heelgetalonderrig, het die volgende tipiese belangstellingsfokuspunte:

a) Op watter ouderdom is kinders bevatlik vir die aanleer van bewerkings met negatiewe heelgetalle?

b) Wat moet die vertrekpunt wees by die aanleer van bewerkings met negatiewe getalle?

c) Watter rol moet inkledings of fisiese kontekse speel in die aanleer van bewerkings met negatiewe heelgetalle?

1.3.1 Alan Bell en die Nottinghamskool

Bell en ander navorsers verbonde aan die *Shell Centre for Mathematical Education* aan die Universiteit van Nottingham doen reeds etlike jare lank intensiewe navorsing oor die onderrig en leer van heelgetalrekenkunde.

a) Uitgangspunt

Bell (1983 : 31) konstateer onomwonde dat die navorsing wat deur hulle aangepak word, nie poog om ´n motivering te vind waarom bewerkings met negatiewe getalle aangeleer word nie, maar om inkledings te verskaf waardeur insig gewen kan word.

Bell gaan van die standpunt uit dat die konsep van negatiewe getalle baie moeilik is vir jong kinders. Hy stel voor dat kinders in die ouderdomsgroep 8 - 11 jaar blootgestel moet word aan fisiese kontekste waar negatiewe getalle gebruik sou kon word, byvoorbeeld, die BBC plate-treffersparade, *Top 20;* as voorbereiding vir onderrig in bewerkings met negatiewe heelgetalle vind dan plaas in die ouderdomsgroep 11 - 14 jaar.

Volgens Bell moet die leerlinge gehelp word om ´n ryker arsenaal van betekenisse vir negatiewe getalle op te bou. Die betekenisse moet kom van situasies waarin die kennis toegepas kan word.

Negatiewe getalle moet geanker word in die realiteit wanneer bewerkings aangeleer word. Daar moet egter ´n verband tussen die bewerkings en die manier waarop hulle hulself in die praktyk manifesteer, wees. Byvoorbeeld, daar sou van die kind gevra kon word om ´n storiesom vir $8 - {}^{-}3 = 11$ te skryf (Bell, 1983 : 30). Bell se standpunt in hierdie verband is:

If we ask a pupil to write a story corresponding to 8 - 3 = 5, he would talk about taking away 3 apples, or John having 5 more sweets than Peter, but all we would get for 8 - ⁻3 = 11 would be ´two minuses make a plus.´

I would like him to be able to say, or at least think, ´There are two sorts of subtraction with negatives: making up differences and taking away changes (which means reversing them.)´ So it could be a temperature changing from ⁻3 up to 8; or John being left with $8 after losing $3, so what did he have before? (1983 : 30)

Bell erken dan egter: *Neither of these operations is easy to conceptualise. My contention is that it is this kind of knowledge of negative numbers, not a garbled ´two minuses make a plus´, which is the right objective* *__initially__* *for all pupils. (1983 : 30)*

Dit is dan die rede waarom Bell aanvoer dat die aanleer van breuke in die laerskool tereg voorrang geniet bo die aanleer van bewerkings met negatiewe getalle, want die breuke word makliker in die realiteit veranker.

Uit navorsingsprojekte stel Bell vas dat aftrekking deur leerlinge in die eerste jaar van onderrig t.o.v heelgetalrekenkunde, uitgevoer word as manipulasie van simbole, sonder om die gerigte getalle as ´n uitdrukkingswyse vir hoeveelhede te beskou.

In verband met die visioen van ´n enkele inkleding wat vir alle bewerkingsgevalle met negatiewe getalle kan geld, spreek Bell hom as volg uit:

Regarding the search for a single model, I regard this *as a mathematician´s problem. I mean this straight; as a mathematician I find it an interesting problem, and pupils might also find it satisfying as a validation of the system when they are familiar with it. But it is hardly relevant to the problem of learning the system.* (1983 : 31)

In die verband verwys hy met waardering na George Glaeser van die IREM van Strasbourg se beskouing dat die soeke na ´n enkelmodel laat vaar moet word omdat dit in die pad staan van vooruitgang in die veld van onderrig van bewerkingsheelgetalle.

Hy opper egter ernstige besware teen dieselfde skrywer se voorstel dat negatiewe getalle eers formeel bekendgestel moet word en die inkledings eers daarna.(1983:32)

Bell voer aan dat in gewone wiskundige aktiwiteit gewerk word met intuïsies wat beelde en verbande bevat om ons redenasies te steun. *We use it as checks on our intuitive systems.* (Bell, 1983 : 30)

Dit is dus sy standpunt dat ´n korrekte konkreetgebaseerde intuïtiewe sisteem opgebou moet word vir kinders, vanuit die kennis van hoe gerigte hoeveelhede funksioneer in bekende situasies.

1.3.2 Freudenthal en Goffree

a) Uitgangspunt:

Hierdie skool huldig ook die mening dat fisiese kontekste die sogenaamde *"cultural amplifiers"* (Buys 1985 : 1), soos Semadeni dit noem, nuttige beginpunte is by die onderrig van negatiewe getalle as bewerkingsgetalle, vlg. F.Goffree (persoonlike mededeling, 7 Oktober 1985) : *Voor negatieven getallen moet je dus op zoek gaan naar verschijnselen, situasies, contexten ... die door negatieve getallen georganiseerd, georden, gestruktureerd kunnen worden ...*

Goffree (1985 : 2) noem dat negatiewe getalle wel ter sprake kom in die vorm van temperatuurveranderinge, dit wil sê verskuiwings op die termometer, in die laerskoolkurrikulum. Dit geld egter net vir die eenvoudige gevalle, aangesien die aftrekker tog nooit negatief kan wees as daar met verskuiwings op die termometer gewerk word nie.

Die navorsing wat deur die Nederlandse skool gedoen is, het ook laerskoolkinders betrek om hul bevatlikheid vir bewerkings met negatiewe getalle te bepaal, asook hul intuïtiewe denke oor hierdie onderwerp.

Hierdie skool erken dus die inagneming van leerling-intuïsies by die bepaling van onderrigstrategie.

Volgens Freudenthal (1973 , 276): *The pupil should learn to tackle such problems by intuitive <u>means</u>, even by <u>ad hoc</u> means, and he should do it in a diversified way. With respect to these concepts such intuitive methods are again <u>bottom level</u> <u>pre-mathematics</u>. The pupil should not stay at this level because he has to go on to learn mathematics.*

Verder konstateer Goffree (1985 : 20) dat: *De introductie van negatieve getallen zou tog immers vanuit het gebruik in de realiteit moeten worden gemotiveerd.*

Die realiteitswaarde van negatiewe getalle word egter as baie laag beskou. Goffree maak ´n saak daarvoor uit dat die maatskaplike relevansie van negatiewe getalle ook laag is.

Buys (1985 : 10) rapporteer dat hy verwarrende ervarings met die interpretasie van bewerkings in terme van skuld, teëgekom het. Baie van die leerlinge wat hy in sy projek betrek het, het afgestap van die gebruik van ´n realiteitsgekoppelde steunpunt en hulle meer laat lei deur getalsmatige oorweginge. Ook ondervind Buys (1985 : 13) dat leerlinge hul toevlug neem tot baie oppervlakkige vasgestelde reëlmatighede, so asof hulle desperaat gryp na 'n reël om aan vas te klou.

Buys isoleer die volgende didaktiese riglyne vir die onderrig van heelgetalrekenkunde (1985 : 14 - 15):

* Om die kinders 'n beter vat op heelgetalle te gee, moet die negatiewe getalle realiteitswaarde kry. Jy gee betekenis(se) aan negatiewe getalle en dit is dan vir die kind makliker om vanuit hierdie betekenisse die eienskappe van negatiewe getalle op te spoor.

* Onderrig moet nou aansluit by intuïsies om wanopvattinge uit die weg te ruim en intuïtiewe besef op te skerp.

* Wiskunde as *meta-aktiviteit*: *Het komt van tijd tot tijd voor dat je buiten het eigenlijke onderwerp moet treden, het onderwerp in relatie tot andere onderwerpen moet bekijken en vanuit het globale overzicht dat je dan hebt tot*

bepaalde bevindingen kunt komen die wezenlijk zijn voor het onderwerp waar je mee bezig bent. (Buys, 1985 : 15)

* Soek oplossingstrategieë en bewerkingsreëls in wiskundige konteks, maar vanuit eie ervarings en voorkeure, dit wil sê: *Plaats de kinderen af en toe in een wiskundige kontekst, waarin ze aanknopend bij wat ze wiskundig gezien al weten, tastend naar nieuw houvast, overwegend vanuit eigen ervaringen en voorkeuren, tot oplossingstrategieën kunnen komen.* (Buys, 1985 : 15)

* Wiskundige aktiwiteit is 'n konstruerende aktiwiteit waar verkennend, ondersoekend, opsporend, strukturerend te werk gegaan word.

Murray asook Malan (1986) se bevindinge dui daarop dat konkrete verankering van bewerkings met heelgetalle moontlik nie so belangrik is as wat deur die bogenoemde skrywers aangetoon word nie, in die sin dat positiewe blyke van intuïsies op abstrakte vlak op grond waarvan bewerkings uitgevoer kan word, gevind word. 'n Meer abstrakte benadering word ook aangedui deur die feit dat die werklike betekenis van bewerkings met negatiewe getalle nie in eenvoudige direkte fisiese toepassing geleë is nie, maar eerder in abstrakte wiskundige kontekste soos die oplossing van vergelykings, eksponente, afstande tussen punte in die Cartesiese vlak en die ongeslotenheid van die telgetalle onder aftrekking. Malan (op cit) vind ook dat laerskool-leerlinge heelgetalrekenkunde interessant en stimulerend vind sonder verwysing na konkrete toepassings. Die moontlikheid bestaan dat die intellektuele uitdaging om antwoorde vir abstrakte vrae soos $^{-}5 + {}^{-}3 = ?$ te vind ´n sterk appêl tot leerlinge rig.

HOOFSTUK 2

´n TEORETIESE BEGRONDING VAN DIE NAVORSINGSMETODE

2.1 Taakgerigte onderhoudvoering

Ginsburg (1983 : 7) onderskei twee vorme van persoonlike onderhoude as metode om inligting oor die aard van leerlinge se wiskundige denke te bekom:

* die hardop-praat tegniek
* kliniese onderhoudtegniek

2.1.1 Die hardop-praat-tegniek

Die ondersoekpersoon word gevra om alles waaraan hy dink terwyl hy besig is om ´n moeilike probleem op te los, hardop te sê.

Nadat hierdie instruksie gegee is, meng die onderhoudvoerder nie weer in nie, behalwe om die relevante take aan die ondersoekpersoon te stel.

Byvoorbeeld: Die volgende probleem word gestel:

DONALD + GERALD = ROBERT

D = 5

Bereken die numeriese waarde van elke letter.

INTERVIEWER (I): I will give you that D is 5 in this problem. Please talk.

SUBJECT (S): Well D ... giving D = 5 automatically makes T a zero. Could you make T a zero?

I: T is a zero.

S: Because 5 plus 5 is equal to 10. And that´s simple from the problem. And looking at the leftmost column, you can see that R is either 1 or 2 greater than G, but that doesn´t seem to help very much at this point. In the second column having the two L´s equal, and also the two A´s equal in the third column, doesn´t seem to help too much at this point either ... (Ginsburg, 1983 : 8)

2.1.2 Die kliniese onderhoud:

Twee vorme word onderskei, nl.:

* die verbale kliniese onderhoud
* die aangepaste kliniese onderhoud.

a) Die Verbale kliniese onderhoud:

Hierdie tipe onderhoud is oorspronklik deur Piaget gebruik. Dit behels ´n buigsame ondervraging van individuele kinders op ´n totaal verbale vlak. Konkrete voorwerpe word nie gebruik nie.

Byvoorbeeld: *I: What´s the biggest number you can think of?*

S: A billion.

I: Is that the biggest number?

S: No.

I: What is?

S: I don't know.

I: Why don't you know?

S: Numbers never end.

I: What if somebody told you that a googol is the biggest number?

S: I'd say that numbers don't end.

I: Could you prove it?

S: No.

I: What if you add 1 to a googol?

S: A googol and 1.

(Ginsburg, 1983 : 10)

b) Die aangepaste kliniese onderhoud

Hierdie metode is ontwikkel toe Piaget tot die gevolgtrekking gekom het dat die verbale metode soms ontoereikend is, veral in die geval van jong kinders wat moeilik slegs op verbale vlak funksioneer. Toe het hy konkrete hulpmiddels gebruik om die probleem te illustreer. Die kind se hantering van hierdie objekte het dan ook sy gedagtes verklap. Die data hier is dus verbale uitinge, sowel as nie-verbale gedrag. Ook in hierdie geval pas die vrae aan by vorige response.

Byvoorbeeld: *Hab (5 : 3) began by putting 9 sweets opposite the 6 of the model, but made the row the same* *length. That's it. - Are they the same? - I'm not sure. - Where are there more? - There (row of 9, close together). - What must we do then? - (She put 6 opposite 6 of the model and removed the rest). - (The 6 of the model were then closed up). - Are they the same? - No. - Are there as many here (model) as there? - No, there (copy) are more. - Is there more to eat on one side than on the other, or are they both the same? - I shall have more to eat. - Make them both the same, then - (She removed 2, then made the one-one correspondence, and finally put the two back when she found they were missing!)* (Ginsburg, 1983 : 11)

Aangesien die onderhoudvoerder in die hardop-praat-metode die minimum mag inmeng , kan dit 'n probleem skep by jong kinders wat hul denkprosesse nog nie voldoende verbaal kan omskryf nie.

Die kliniese onderhoudtegniek mag weer te gestruktureerd wees om die fyn nuanses van kognitiewe prosesse aan die lig te bring.

In die <u>aangepaste</u> kliniese onderhoudtegniek van Piaget word wel voorsiening gemaak dat na 'n aanvanklike probleemstelling deur die onderhoudvoerder, die res van die onderhoud gekonstitueer word deur die kind se reaksies op die probleem. Aangesien hierdie metode ook ruimte laat vir die bekendstelling van konkrete hulpmiddels, word die verloop van die onderhoud nie slegs deur die verbalisering van die ondersoekpersoon bepaal nie, maar ook deur die reaksies op en gebruik van die konkrete hulpmiddels.

Piaget het ´n gestandaardiseerde weergawe van die kliniese metode ontwerp om ´n gestruktureerde benadering van gestandaardiseerde toetsing te kombineer met die buigsaamheid van die kliniese metode om dus die vereistes van sistematiese waarneming met diè van navorsing met jong kinders, te kombineer(1983:90 - 107).

Die persoonlike onderhoude wat in hierdie ondersoek gedoen is, is geskoei op Piaget se gestandaardiseerde weergawe van die kliniese metode, maar elemente van die hardop-praat-metode is ook ingesluit.

2.2 Gebreke van die protokolmetodes

a) Die hardop-praat-metode voorveronderstel dat die ondersoekpersoon op ´n hoë kognitiewe vlak funksioneer. (Ginsburg, 1983 : 16) Die onderhoudvoerder konsentreer op individuele verskille. In die kliniese onderhoud is die doelstelling om elke kind se hoogste vlak van kognitiewe funksionering te bepaal.

b) Die vlak van verbalisasie kan ´n probleem skep by beide metodes. Dit kan verbeter word deur konkrete objekte aan te bied om die probleem te illustreer.

c) Die individu se geskiedenis (idiosinkratiese kennisbasis) behoort blootgelê te word in die hardop-praat-metode. In aansluiting by (b), bly dit baie moeilik om aan elke individu reg te laat geskied.

d) Die probleem van subjektiewe ekwivalensie: Verstaan die ondersoekpersoon die probleem?

e) Erns van reaksie: Maak die ondersoekpersoon erns met die taak?

f) Sterkte van oortuiging: Is die ondersoekpersoon se reaksie eg, dit wil sê, sou hy op ´n soortgelyke manier reageer wanneer hy met ´n soortgelyke probleem gekonfronteer word?

2.3 <u>Uiteensetting van werkwyse van persoonlike onderhoude in hierdie ondersoek</u>:

a) Die onderhoud vind plaas in ´n stil vertrek waar net die onderhoudvoerder en ondersoekpersoon teenwoordig is.

b) Die onderhoudvoerder stel die ondersoekpersoon op sy gemak deur ´n paar roetinevragies.

c) Dan word die ondersoekpersoon bekendgestel aan ´n gestruktureerde onderhoudsvel wat taakkaarte as semi-konkrete hulpmiddels bevat. (Kyk Bylae 2). Hierdie taakkaart is dieselfde een wat deur Murray in 1984 gebruik is (1984 : 22 - 27). Hierdie gestruktureerde ondersoek maak voorsiening vir individuele antwoorde en verskille in die sin dat afhangende van die antwoord wat deur die ondersoekpersoon verskaf word, ´n volgende taakkaart aangebied word. Die volledige uiteensetting van hierdie prosedure word aangebied in Hoofstuk 4. Soos blyk uit bogenoemde, akkommodeer hierdie onderhoud dan by uitstek individuele verskille soos deur Ginsburg (1983 : 7 - 11) aangehaal as synde die doel van die hardop-praat-metode teenoor die doel van evaluering van vermoëns van die kliniese onderhoud.

d) Die laaste taakkaart is ´n skriftelike toets wat deur al die leerlinge gedoen word, ongeag van vorige response. Dit verskil egter van die standaardmetode in die sin dat nadat die antwoord neergeskryf is, ´n verbale verduideliking van sy/haar werkswyse deur die persoon gegee word met minimum inmenging van die onderhoudvoerder, soos in die hardop-praat-metode. Vrae word wel gevra, soos in die gewysigde kliniese metode, maar nie van so ´n aard om ´n moontlike tendens na te speur nie, slegs om lig te werp op denkprosesse. Daar word deurentyd van die veronderstelling uitgegaan dat waargenome kognitiewe prosesse grootliks kan verskil van kind tot kind en van ouderdomsvlak tot ouderdomsvlak.

Die onderhoud het wel voldoen aan die vereiste van buigsaamheid in die protokolmetodes, in die sin dat gestandaardiseerde vrae nie in dieselfde volgorde aangebied is vir alle ondersoekpersone nie en dat nie alle vrae aan alle ondersoekpersone gevra is nie.

Die onderhoude wat hier gerapporteer word, bevat ook elemente van naturalistiese waarneming in die sin dat ´n aantekening gemaak word van opvallende gedragsuitinge in die onderhoudsituasie.

2.4 Gebreke van hierdie gerapporteerde ondersoek teen die agtergrond van die vereistes en gebreke van die protokolmetodes.

Hierdie is ´n baie menslike poging om te probeer deurdring na die denkstrategieë wat leerlinge spontaan gebruik wanneer van hulle verwag word om met negatiewe getalle as bewerkingsgetalle te hanteer voordat hulle onderrig ontvang het daarin.

Elke ondersoekpersoon is ´n individu met ´n unieke stel potensialiteite, ´n unieke idiosinkratiese kennisbasis en ´n unieke begrips- en gevoelsmatige hantering van ´n probleemsituasie. Dit is dus ´n uiters sensitiewe aangeleentheid om te probeer om die denkstrategieë van 'n individu te interpreteer, te woord te stel en later te kategoriseer. Dit behels die betreding van die persoonlike eie van elke ondersoekpersoon.

Hierdie ondersoek word dus met die grootste piëteit gerapporteer, wetende dat individue se uniekheid en unieke denkstrategieë geweld aangedoen mag word, maar met die vertroue dat die algemene tendense wat uitgewys word, nuttig sal wees in ons soeke na die volmaakte onderrig-strategieë in ons skole in die beste belang van ons kinders.

Vlak van verbalisasie

Persoonlike onderhoude is, soos reeds genoem, met st.5- en st.6-leerlinge gevoer. Uit die beskrywing van die metode wat gevolg is, is dit duidelik dat 'n interpretasie en bepaling van die intuïsies waaroor die kind beskik, grootliks afhanklik is van die vermoë van die kind om verbaal met die onderhoudvoerder sy denkprosesse en die metode wat hy gebruik het, te kommunikeer.

Die meeste van die leerlinge is op daardie stadium in elk geval nie in staat om die metode of denkproses in wiskundig eksakte terme te rapporteer nie.

Die onderhoude is op band vasgelê, sodat die kind se weergawe in sy geheel behou word om later getranskribeer te word. Om te probeer klaarheid kry oor die kind se metode en intuïsies, het die onderhoudvoerder wel vrae gevra (anders as in die hardop-praat-metode), maar die onderhoudvoerder moet versigtig wees om niks aan die ondersoekpersoon te suggereer of hom woorde in die mond te lê nie, want daar word na <u>intuïsies</u> gesoek.

Die onderhoudvoerder interpreteer dus alreeds wat die kind sê, want gedurende die onderhoud word ook alreeds notas geneem.

Die onderhoud is alreeds 'n interpretasie, want die interaksie tussen persone (in hierdie geval die onderhoudvoerder en die ondersoekpersoon) berus op subjektiewe waarneming en reaksie.

Wanneer die onderhoudvoerder na die band luister wat teruggespeel word, gaan nuanse en intonasie reeds verlore, daarom is die opname deurgaans aangevul deur geskrewe notas wat tydens die onderhoud geneem is.

Omdat die onderhoudvoerder abstrakte wiskundige terminologie alreeds geïnternaliseer het, is dit die agtergrond en instelling waarteen die kind se verbale weergawe *gehoor* word. Alhoewel deurgaans gepoog is om tot die letter van die kind se werklike verbale weergawe te kom, moet interpretasie plaasvind indien die inligting vir navorsing verwerk moet word.

Dit wat die leerling uitspreek as verduideliking, kan 'n baie gebrekkige weergawe wees van sy eintlike begrip van die geval onder bespreking. Dit mag wees dat die leerling met 'n misplaaste woord of geaksentueerde lettergreep die onderhoudvoerder wat dit moet lees, interpreteer en kategoriseer, onbewustelik op 'n dwaalspoor plaas.

Uit die getranskribeerde *redes* of verduidelikings, stel die onderhoudvoerder nou 'n aantal denkstrategieë op om die bogenoemde *redes* te akkommodeer. Dit wil sê hier word nou gekategoriseer, wat onmiddellik die unieke aard van elke kind se denkproses skaad. Hoewel daar met 100 kategorieë vir 97 leerlinge gewerk word, moet bogenoemde beslis in ag geneem word.

Met die plasing van elke rede in 'n kategorie, vind 'n verdere interpretasie en inkleding plaas, want omdat verskeie leerlinge eksperimenteer met verskeie denkstrategieë in die loop van die onderhoud is dit nooit geregverdig om vir 'n verduideliking te besluit dat dit eintlik iets anders beteken omdat 'n woord of aksent misplaas mag wees nie.

Die feit bly egter staan, soos Murray dit stel: *die kind kan nie alles onder woorde bring nie.* (1984 : 26), en dat die onderhoudvoerder die gevaar loop om wat gesê is, verkeerd te interpreteer.

Dit is dan hoofsaaklik om hierdie rede dat replisering en kontrolering van so ʼn ondersoek deur ʼn ander onderhoudvoerder, met ander ondersoekpersone in ʼn onafhanklike milieu so gebiedend noodsaaklik is. Ook het hierdie ondersoek gekompenseer vir gebreke hierbo genoem omdat:

i) ʼn Groep leerlinge verteenwoordigend van ʼn normale verspreidingskurwe van vermoëns geneem is, terwyl die leerlinge met wie Murray onderhoude gevoer het, hoofsaaklik van bogemiddelde vermoëns was.

ii) ʼn Heelwat groter aantal onderhoude is gevoer (137 teenoor 46 van Murray).

iii) Daar was ʼn tydsverloop van een maand tussen die eerste 10 en die volgende 29 onderhoude. Daarna was daar weer ʼn tydsverloop van een maand tussen laasgenoemde en die volgende 58. Toe het ses maande verloop voordat 20 onderhoude herhaal is.

In die tyd wat verloop het tussen onderhoude, is die inligting getranskribeer en neigings en tendense kon dus opgevolg word en namate die wye spektrum van geskakeerdheid van intuïsies en werkswyses duidelik geword het, kon 'n meer neutrale en bevatlike benadering gekweek word.

HOOFSTUK 3

VORDERING IN HOËRSKOOLLEERLINGE SE BEMEESTERING VAN HEELGETALREKENKUNDE

3.1 Inleiding

Murray (1984:11) vind dat st.8-leerlinge nie veel beter as st.7-leerlinge presteer in sekere moeiliker gevalle van berekenings met heelgetalle nie. Sy vind hierdie verskynsel aan die hand van 'n skriftelike toets (Bylae A) waarin drie vrae oor elk van die volgende bewerkingsgevalle gestel word:

Vir a en b natuurlike getalle:

1.	$^{-}a + {}^{-}b$		byvoorbeeld	$^{-}3 + {}^{-}5$
2.	$a + {}^{-}b$	$a > b$	byvoorbeeld	$5 + {}^{-}2$
3.	$^{-}a + b$	$b > a$	byvoorbeeld	$^{-}4 + 6$
4.	$a + {}^{-}b$	$b > a$	byvoorbeeld	$3 + {}^{-}5$
5.	$^{-}a - {}^{-}b$	$b > a$	byvoorbeeld	$^{-}9 - {}^{-}4$
6.	$^{-}a - {}^{-}b$	$a > b$	byvoorbeeld	$^{-}5 - {}^{-}9$
7.	$a - b$	$b > a$	byvoorbeeld	$5 - 7$
8.	$^{-}a - b$		byvoorbeeld	$^{-}7 - 3$
9.	$a - {}^{-}b$		byvoorbeeld	$7 - {}^{-}5$
10.	$a \times {}^{-}b$		byvoorbeeld	$5 \times {}^{-}4$
11.	$^{-}a \times b$		byvoorbeeld	$^{-}5 \times 4$
12.	$^{-}a \times {}^{-}b$		byvoorbeeld	$^{-}3 \times {}^{-}7$

Hieronder volg 'n tabel met die prestasiepeile van die st.6-, 7- en 8-leerlinge wat die skriftelike toetse van Murray afgelê het. Die getalle in die tabel is die persentasies van die leerlinge wat die betrokke bewerking korrek uitgevoer het (in minstens twee uit drie gevalle). Die eerste ondersoek verwys na die st.6- en 7-klasse uit dieselfde skole (in dieselfde jaar), en die tweede ondersoek verwys na die st.7- en st.8-klasse uit dieselfde skole in dieselfde jaar.

Tabel 1

GEVAL	VOORBEELD	EERSTE STEL TOETSE		WINS	TWEEDE STEL TOETSE		WINS
		St. 6 (993)	St. 7 (1033)		St. 7 (298)	St. 8 (266)	
12	$^-3 \times {}^-7$	33	84	51	90	96	6
11	$^-5 \times {}^-4$	45	82	37	89	98	9
10	$5 \times {}^-4$	54	81	27	96	97	1
4	$3 + {}^-5$	52	76	24	85	93	8
3	$^-4 + 6$	48	75	27	84	92	8
2	$5 + {}^-2$	51	73	22	80	94	14
1	$^-3 + {}^-5$	61	71	10	84	94	10
7	$5 - 7$	48	66	18	80	86	6
5	$^-9 - {}^-4$	57	62	5	66	76	10
6	$^-5 - {}^-9$	34	56	22	51	58	7
8	$^-7 - 3$	21	50	29	49	55	6
9	$7 - {}^-5$	17	49	32	36	48	18

Prestasiepeile van leerlinge in verskillende gevalle van bewerkings met heelgetalrekenkunde (Stellenbosch-ondersoek, Murray, 1984)

Dit val op dat die winste van st.6 na st.7 redelik groot is, met uitsondering van die geval wat deur $^-9 - -4$ geïllustreer word. (Hierdie geval is interessant genoeg een van die gevalle waarin leerlinge voor onderrig baie goed presteer) (Vergelyk Murray, 1984 asook Malan, 1986). Die kommerwekkende verskynsel in hierdie data is egter die klein winste (in verhouding tot die prestasiepeil) van st.7 na st.8, met betrekking tot die laaste vier bewerkingsgevalle in die tabel, naamlik aftrekking. Hierdie verskynsel is ook in ʼn onafhanklike ondersoek in KwaZulu (Van der Merwe, 1986) waargeneem.

Hier moet in ag geneem word dat slegs ongeveer 60% van leerlinge na st.7 met Wiskunde voortgaan, sodat seleksie reeds hoër prestasiepeile in st.8 moet meebring. Dit wil dus voorkom asof onderrig en/of ervaring min bydra tot leerlinge se bemeestering van die aftrekking in die heelgetalle.
(Die winste van st.7 na st.8 is ook by ander bewerkingsgevalle klein. Die prestasiepeile is in hierdie gevalle egter so hoog dat die kleinheid van die winste nie van belang is nie)
Murray se ondersoek is egter gebrekkig in die sin dat dit nie longitudinaal is nie: sy vergelyk verskillende groepe leerlinge in sts.6 en 7 asook in sts.7 en 8. (Van der Merwe se ondersoek is aan dieselfde gebrek onderhewig).

3.2 ´n Longitudinale ondersoek

In die huidige ondersoek is longitudinaal te werk gegaan in die sin dat dieselfde groep leerlinge in st.7 en weer (´n jaar later) in st.8 getoets is; asook ´n ander groep leerlinge in st.8 en weer ´n jaar later in st.9.

Dieselfde toets (Bylae 1) wat deur Murray gebruik is in haar ondersoek, is ook in hierdie ondersoek gebruik. Die toets is dan ook hanteer presies net soos die van Murray.(1984 : 7)

Die toetse is vroeg in die eerste kwartaal afgeneem. Die st.8-leerlinge van 1986 sluit ook die in wat nie in st.8 Wiskunde as vak aanbied nie, omdat ons die effek van onderrig en ervaring in st.7 wil ondersoek.
Die resultate word in Tabel 2 gegee.

Tabel 2

GEVAL	VOORBEELD	ST. 7 1985	ST. 8 1986	WINS	ST. 8 1985	ST. 9 1986	WINS
		DIESELFDE LLe 514	459		DIESELFDE LLe 332	307	
12	${}^{-}3 \times {}^{-}7$	89	90	1	90	97	7
11	${}^{-}5 \times {}^{-}4$	86	91	5	94	99	5
10	$5 \times {}^{-}4$	90	90	0	93	98	5
		-	-	-	-	-	-
1	${}^{-}3 + {}^{-}5$	82	85	3	94	97	3
2	$5 + {}^{-}2$	76	85	9	90	96	6
3	${}^{-}4 + 6$	82	85	3	92	95	3
7	$5 - 7$	81	83	2	90	96	6
5	${}^{-}9 - {}^{-}4$	58	54	-4	67	77	10
6	${}^{-}5 - {}^{-}9$	39	38	-1	48	68	20
8	${}^{-}7 - 3$	36	42	6	45	65	21
9	$7 - {}^{-}5$	28	29	1	39	60	21

Prestasiepeile van leerlinge in verskillende gevalle van bewerkings met heelgetalrekenkunde (Longitudinale data)

Die data bevestig Murray se hipotese dat onderrig en ervaring in st.7 nie veel bydra tot leerlinge se bemeestering van aftrekking in die heelgetalle nie. Dit val egter op dat daar merkwaardige vooruitgang van st.8 na st.9 is, alhoewel die prestasiepeile steeds sorgwekkend laag is.

Hieronder volg ʼn tabel (Tabel 3) wat die gewilde-fout-voorkoms in die relevante gevalle 5, 6, 8, 9 weergee.

TABEL 3

Geval	Bewerk.geval	Korrekte antwoord				Mees gewilde fout.antw.			
		´85/86 St.7 /8		´85/86 St.8 /9		´85 / 86 St.7 / 8		´85 / 86 St.8 / 9	
5	$^{-}9 - {}^{-}4$	58	55	63	74	26	30	30	19
6	$^{-}5 - {}^{-}9$	40	39	48	65	34	36	34	20
8	$^{-}7 - 3$	36	44	47	62	52	46	45	31
9	$7 - -5$	27	28	38	56	57	57	52	37

By bewerkingsvoorbeeld 8 ($^{-}7 - 3$) gee meer leerlinge (46% van die totaal oor al die standerds en toetsafnemings) die foutiewe antwoord $^{-}4$ as die korrekte antwoord.

By bewerkingsvoorbeelde 5 en 6 ($^{-}9 - {}^{-}4$ en $^{-}5 - {}^{-}9$) is die populêre fout om op te tel in plaas van af te trek (meer as 30% van die leerlinge).

Die data vir die vyf skole wat by die ondersoek betrek is, word afsonderlik gegee in Tabel 4.

Tabel 4

GEVAL	VOORBEELD	SKOOL (1) 1985/86 St. 7/8	W	St. 8/9	W	(2) St. 7/8	W	St. 8/9	W	(3) St. 7/8	W	St. 8/9	W	(4) St. 7/8	W	St. 8/9	W	(5) St. 7/8	W
9	$7 - {}^{-}5$	23/21	- 2	38/71	+43	30/37	+ 7	56/72	+16	15/16	+ 1	19/39	+20	69/65	-4	64/63	- 1	19/18	- 1
8	${}^{-}7 - 3$	30/21	- 9	38/59	+21	38/55	+17	60/78	+18	28/38	+10	22/54	+32	53/59	+6	70/63	- 7	32/28	- 4
6	${}^{-}5 - {}^{-}9$	33/31	- 2	50/82	+32	40/44	+ 4	63/82	+19	26/25	- 1	26/48	+22	70/61	-9	70/71	+ 1	35/30	- 5
5	${}^{-}9 - {}^{-}4$	45/51	+ 6	81/82	+ 1	55/59	+ 4	74/84	+10	52/46	- 6	58/61	+ 3	82/76	-6	72/86	+14	63/39	-24
2	$5 + {}^{-}2$	54/71	+17	81/94	+13	78/86	+ 8	97/99	+ 2	77/92	+15	83/93	+10	94/96	+2	96/98	+ 2	76/74	- 2
4	$3 + {}^{-}5$	64/67	+ 3	81/94	+13	78/87	+ 9	98/98	+ 0	83/86	+ 3	84/91	+ 7	96/91	-5	94/96	+ 2	81/72	- 9
7	$5 - 7$	59/76	+17	94/100	+ 6	90/87	- 3	98/99	+ 1	79/86	+ 7	79/94	+15	87/84	-3	96/94	- 2	82/79	- 3
3	${}^{-}4 + 6$	66/67	+ 1	88/94	+ 6	81/89	+ 8	100/100	+ 0	87/94	+ 7	90/95	+ 5	99/94	-5	96/98	+ 2	76/75	- 2
1	${}^{-}3 + {}^{-}5$	70/68	- 2	88/94	+ 6	78/87	+ 9	96/98	+ 2	85/93	+ 8	88/93	+ 5	99/94	-5	96/94	- 2	84/74	-10
11	${}^{-}5 \times 4$	79/82	+ 3	81/94	+13	85/94	+ 9	98/100	+ 2	84/90	+ 6	90/97	+ 7	95/97	+2	98/100	+ 2	90/89	- 1
12	${}^{-}3 \times {}^{-}7$	87/85	- 2	94/100	+ 6	93/94	+ 9	97/100	+ 3	83/90	+ 7	84/92	+ 8	96/90	-6	96/98	+ 2	87/86	- 1
10	$5 \times {}^{-}4$	85/79	- 6	88/94	+ 6	91/92	+ 1	99/100	+ 1	86/93	+ 7	90/95	+ 5	97/97	+0	96/100	+ 4	90/86	- 4

Prestasiepeile vir die leerlinge van die vyf skole in Kimberley, individueel beskou.

W = Wins

In skool 3 bereik leerlinge teen st.9 nog nie naastenby dieselfde prestasiepeile vir aftrekking as by ander skole nie, en is daar tewens min vordering van st.8 na st.9.

Die gevolgtrekkings waartoe Murray gekom het, is in die replisering van haar toetse gestaaf (1984:4-6; 11-12)

HOOFSTUK 4

INTUïSIES TEN OPSIGTE VAN HEELGETALREKENKUNDE BY ST.6-LEERLINGE VOOR ONDERRIG

4.1 Die Ondersoekgroep:

Onderhoude is gevoer met st.6-leerlinge voor hulle formele onderrig oor negatiewe heelgetalle ontvang het.

Leerlinge in st.6 by een hoërskool is betrek en ´n verteenwoordigende steekproef van 40 Afrikaanssprekende leerlinge is geneem.

Die groep sluit in 37 dogters uit ´n moontlike 72 in die universum en 3 seuns uit ´n moontlike 4 in die universum.

Die ouderdomme van die leerlinge wissel tussen 12 jaar 11 maande en 15 jaar 6 maande.

Hieronder volg ´n frekwensietabel van die ouderdomme van die st.6-leerlinge.

Tabel 5

Intervalle	Frekwensie
12:11 en laer	2
13:0 - 13:3	5
13:4 - 13:7	6
13:8 - 13:11	7
14:0 - 14:3	7
14:4 - 14:7	4
14:8 - 14:11	6
15:0 - 15:3	2
15:4 - 15:6	1

Ouderdomsfrekwensie

Hierdie 40 leerlinge het uit 14 verskillende laerskole in Noord-Kaapland gekom.

Die diversiteit in hierdie groep verminder dus die invloed van parameters soos spesifieke onderrigmetodes en/of -foute, op die resultate van hierdie ondersoek.

* 4 leerlinge, afkomstig van dieselfde laerskool, het in st.5 reeds onderrig in die bewerkings met negatiewe heelgetalle ontvang.
* 4 leerlinge was st.6-herhalers. (Dit impliseer dus dat hierdie leerlinge gedurende hulle eerste jaar in st.6 onderrig in negatiewe heelgetalle ontvang het.)

4.2 Die Ondersoekmetode:

Die eksperimentele verloop sou insluit 'n kort lesing oor temperatuur om te verseker dat al die leerlinge met die begrip van negatiewe heelgetalle as metingsgetalle vertroud is.

Twee weke na die lesing is daar begin om met elke individuele leerling ´n persoonlike onderhoud te voer aan die hand van taakkaarte. (Bylae B)

4.2.1 <u>Die lesing en terme gebruik ten opsigte van negatiewe heelgetalle</u>:

Die lesing het ongeveer 15 minute geduur. Die lae temperature in Europa tydens die frats-winter van 1984/1985 het ´n goeie aanknopingspunt (vergelyk Bell (1983 : 31) se "social amplifiers") verskaf, aangesien wye publisiteit daaraan verleen is.

Die term negatiewe getal is nie aan die leerlinge voorgehou nie. Daar is bloot van die *minus* of *min* wat deur die leerlinge in die voorbereidende lesing gebruik is, gebruik gemaak wanneer die antwoord bespreek is.

Daar is dan mondeling ´n paar verskuiwings op ´n skets van ´n termometer gedoen, byvoorbeeld:
Dit is 3 grade C. Dit word nog 10 grade C kouer. Waar staan die kwik nou?

4.2.2 <u>Die verloop van die persoonlike onderhoud:</u>

Die onderhoude is met individuele leerlinge in ´n rustige, stil vertrek gevoer, volgens die volgende prosedure:

a). Inleiding:

Die leerling word gegroet en op sy/haar gemak gestel. Algemene inligting soos naam, ouderdom en standerd word gevra.

Die leerling word gerusgestel dat:

* dit nie ´n toets is nie,
* daar nie punte en persentasies uitgewerk word nie,
* die onderhoudvoerder belangstel in die denk-proses en prosedure wat die leerling volg, sodat daar in die onderrigsituasie beter by die denkvlak van die leerling aangepas kan word,
* die vraag hoekom, wat telkens gevra word, nie ´n indikasie van ´n regte of verkeerde antwoord is nie,
* die doel van die bandspeler word verduidelik, naamlik dat die onderhoudvoerder die onderhoud op band neem om later te transkribeer, want die verduidelikings kan nie so vinnig neergeskryf word nie.

b). Die Onderhoudvoerder.

Die onderhoudvoerder waak teen onderrigvrae en woorde in die mond lê, soos byvoorbeeld:
by die leerlingrespons 4 - 9 = 5
Onderhoudvoerder: *Is die antwoord 5 omdat 4 - 9 = 9 - 4?*

Verder waak die onderhoudvoerder ook daarteen om deur stembuiging, houding of stemtoon tevredenheid, al dan nie, met ´n bepaalde antwoord te kenne te gee.

So ver as moontlik trag die onderhoudvoerder om onderlinge eenvormigheid in houding, woord en daad by al die onderhoude te handhaaf.

c). Taakkaarte

Aangesien dit ´n gestruktureerde onderhoud, ondersteun deur taakkaarte is, sal elke taakkaart, onderskeidelik genommer A; B1; B2; B3; C1; C2; D, verduidelik en bespreek word.
Die taakkaarte word nie in ´n bepaalde volgorde aangebied nie, maar die volgorde word bepaal deur die antwoorde van die leerling, dit wil sê die volgorde vir al die leerlinge sal ook nie dieselfde wees nie.

´n Verdere implikasie is ook dat al die taakkaarte nie deur al die leerlinge aangepak word nie.

Oorsigtelik behels die taakkaarte die volgende :

Taakaart B1 bevat verskillende voorbeelde wat al twaalf bewerkingsgevalle insluit. Die onderhoudvoerder is hoofsaaklik in die response op hierdie bewerkingsgevalle geïnteresseerd, maar om die leerling te probeer lei tot die herkenning van die negatiewe getal as bewerkingsgetal, is voorbereidende taakkaarte ook ingesluit.

Taakkaart A lei die probleem in met die bewerking 4 - 9 =?

Taakkaart B3 probeer die verkeerd lees uit die mag van die gewoonte uitskakel,met die vraag:
Is 9 - 4 = 4 - 9 ?

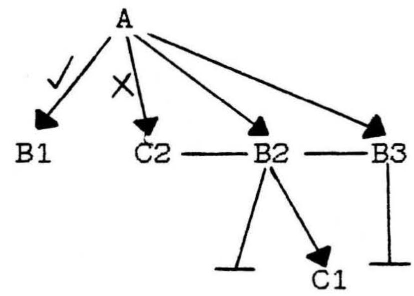
Taakkaart B2 probeer deur patroonmatigheid die kind lei tot die herkenning van die negatiewe getal as aanduider van kleiner as nul.

Taakkaart C2 bevat ʼn afbeelding van ʼn termometer met afmetings vanaf $^-10$ grade C tot 10 grade C.

Taakkaart C1 mik na die herkenning van die algemene geval, nadat ʼn spesifieke voorbeeld aangebied is.

Taakkaart D isoleer weer drie verskillende vermenigvuldigingsvoorbeelde om die leerling te lei na die antwoord op die intuïtief moeilike geval $^-a \times {}^-b$ bv. $^-4 \times {}^-5$

Hieronder volg ´n vloeidiagram wat die verloop van die onderhoude illustreer



´n Korrekte antwoord by A verskaf deurgang na B1. ´n Verkeerde antwoord by A word opgevolg met C2, B2 of B3; afhangend van die aard van die foutiewe antwoord. Vanaf B3 word na B2 en daarna na C2 gevorder, mits die antwoord reg is. ´n Verkeerde antwoord lei tot die staking van die onderhoud. Vanaf B2 vorder die onderhoud na C1. In een spesifieke geval van ´n verkeerde antwoord by B2 word die onderhoud ook gestaak.

Hieronder volg ´n volledige bespreking van die voorbereidende taakkaarte wat hierdie vloeidiagram breedvoerig toelig.

i) <u>Die voorbereidende taakkaarte</u>

Die taakkaarte A; B2; B3; C1; C2 word voortaan na verwys as voorbereidende taakkaarte.

Die doel van die voorbereidende taakkaarte is om die leerling te laat besef dat bewerkings met negatiewe getalle uitgevoer kan word, sonder om dit eksplisiet te verduidelik. Daarna word hulle Taakkaart B1 voorgehou waar hulle self met negatiewe getalle as bewerkingsgetalle moet werk in al 4 die hoofbewerkings.

Taakkaart A:

Hoeveel is:

(1) 8 - 5 = ?

(2) 12 - 7 = ?

(3) 4 + 5 = ?

(4) 4 - 9 = ?

Vrae 1 tot 3 is slegs ingesluit om die leerling op sy gemak te stel en die denke te aktiveer. Interessant is dat ses st.6-leerlinge ´n rekenprobleem skyn te hê met:

12 - 7

Bv. Saartjie : 12 - 7 = 6 (ook 2 ander leerlinge).

Rianne : 12 - 7 = 4 (ook 2 ander leerlinge).

Die onderhoudvoerder was eintlik geïnteresseerd in die antwoord op vraag 4: 4 - 9 = ?.

Indien ´n leerling sou antwoord: 4 - 9 = ⁻5 en boonop ´n aanvaarbare rede gee vir die antwoord, word taakkaart B1 onmiddellik aangebied.

´n Voorbeeld van ´n aanvaarbare rede of motivering vir die antwoord 4 - 9 = ⁻5, is dié van Laurette:

4 - 9 = ⁻5 want 4 - 4 is klaar nul, dan bly daar nog 5 oor wat jy moet aftrek. Dan is dit ⁻5.

Indien die rede wat verskaf word, die leerling se insig onder verdenking plaas, byvoorbeeld: *Jy kan nie 9 van 4 aftrek nie, dan skryf jy ⁻5*, word die leerling taakkaart C2, wat ´n afbeelding van ´n termometer bevat en waar verskuiwings op die termometer gedoen word, aangebied om die wanindruk dat ´n negatiewe teken ´n truuk is om die "onmoomtlike" situasie te hanteer, uit te wis.

Murray (1984 : 8) het die hipotese gestel dat leerlinge wat ´n berekening soos 3 - 7 (geval 7) nie korrek kan uitvoer nie, nie ´n basiese begrip van negatiewe getalle kan hê nie. Sy kon dit nie deur ontleding van die skriftelike toetse se resultate bevestig nie (1984 :9, 11) maar die vermoede het nog bestaan dat die hipotese waar kan wees (dit is mettertyd gedurende hierdie ondersoek definitief weerlê).

Indien ´n leerling onseker skyn te wees, of antwoorde soos onderstaande verskaf:

4 - 9 = *onmoontlik*

4 - 9 = *jy kan nie ´n groot getal van ´n kleintjie aftrek nie*

4 - 9 = *0* word taakkaart B2 aan-

gebied om hom na insig en begrip te probeer lei.

Indien ´n leerling die volgende antwoord verskaf:

$$4 - 9 = 5,$$

word taakaart B3 aangebied om seker te maak dat hy nie bloot verkeerd gelees het of intuïtief die aftrekker en aftrekgetal se plekke omgeruil het nie.

Hekke

Taakkaarte B2; B3; C1; C2; het elk ´n "hek" bevat, dit wil sê ´n bepaalde vraag moes deur leerlinge korrek beantwoord word om toegang tot ´n volgende taakkaart te verkry.

Hierdie hekke en die redes vir die instelling daarvan sal vir elke taakkaart afsonderlik bespreek word. Hulle staan egter almal in die lig van die hipotese dat leerlinge ´n basiese begrip van negatiewe moet hê om bewerkings daarmee te kan doen. .

Taakkaart B3

$$9 - 4 =$$

$$\text{Is } 9 - 4 = 4 - 9 \text{ ?}$$

Die bevestigende antwoord op hierdie vraag het tot die beëindiging van die onderhoud gelei, omdat geglo is dat ´n leerling wat onsensitief ten opsigte van die rigting van die bewerking is, nie sinvolle intuïsies oor negatiewe getalle kan hê nie.

Enige ander antwoord of opmerking verleen toegang tot B2.

Taakkaart B2

1. 4 - 1 =

2. 4 - 2 =

3. 4 - 3 =

4. 4 - 4 =

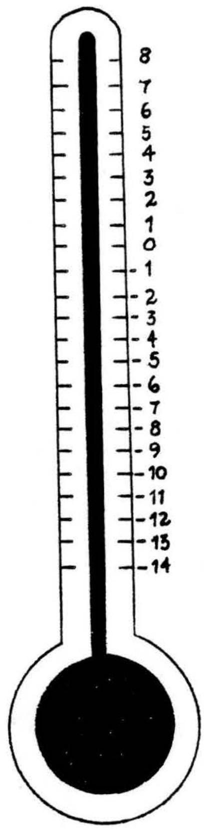
5. 4 - 5 =

´n Korrekte antwoord, nl. 4 - 5 = $^{-}1$, verleen toegang tot C1, waar dieselfde tipe berekening geïsoleerd en nie in patroonmatige vorm aangebied word nie. Dus kan vasgestel word of die leerling nou ´n negatiewe getal as resultaat van ´n bewerking aanvaar.

´n Onsekere houding of traagheid om die probleem aan te pak, dui op ´n onvermoë om die patroonmatigheid te snap of om sonder praktiese inkleding berekeninge op die vertikale getallelyn te doen. Dit verleen toegang tot taakkaart C2 (termometervel). Met die termometervel word gepoog om ´n praktiese denkhulpmiddel beskikbaar te stel om die leerling te lei tot aanvaarding van die negatiewe getal as bewerkingsgetal.

As die leerling antwoord: 4 - 5 = 1 , word die onderhoud gestaak op dieselfde gronde as B3.

Taakkaart C2



Voordat die leerling met hierdie vraag gekonfronteer word, word temperatuurveranderings van die volgende aard aan die leerling voorgehou, in die gegewe volgorde:

2 + 4	(a + b, a, b > 0)
5 - 2	(a - b, a > b)
4 - 7	(a - b, b > a)
$^-2$ + 8	($^-$a + b; b > a)

Die onderhoudvoerder skryf dit as sulks neer en die leerling moet die antwoord inskryf, maar hy noem eers aan die leerling dat dit ʼn termometer is; dat kwik daal as dit kouer word en styg as dit warmer word. Vriespunt word uitgewys en die feit dat ons bokant nul positiewe grade het en onder nul negatiewe grade.

´n Korrekte antwoord op hierdie vraag verskaf deurgang na C1.

Onderhoude word gestaak, indien die leerling nie die verskuiwing op die termometer kan uitvoer nie deur op een van die volgende wyses te reageer:

* leerlinge ignoreer bloot die negatiewe grade byvoorbeeld $^{-}3 - 5$ word gelees as $5 - 3 = 2$.

* Sommige steek vas by nul as hul onderste bewerkingsgrens, byvoorbeeld

$$^{-}2 - 5 = 0$$

* Sommige leerlinge ignoreer die negatiewe teken van die eerste getal.

Indien leerlinge in die verwysingsraamwerk van die praktiese denkhulpmiddel sulke "onlogiese" uitweë kies, is die onderhoud gestaak omdat aanvaar is dat hulle nie sinvolle intuïsies t.o.v. negatiewe getalle kan hê nie.

v) <u>Taakkaart C1</u>

$$4 - 6 =$$

$$4 - 9 =$$

Taakkaart C1 is ingesluit om vas te stel of die leerling die termometer as ´n denkhulpmiddel erken en daarna wel die toepassing kan maak op die soortgelyke gevalle, maar waar daar nie sprake van temperatuur is nie.

Indien die leerling dit nie kan doen nie, en bv. antwoorde soos volg gee:

> *dis onmoontlik* **of** *dis nul* **of** *jy kan mos nie ´n groot getal van ´n kleintjie aftrek nie,* is die onderhoud gestaak.

Korrekte antwoorde verleen toegang tot Taakkaart B1.

<u>Taakkaart B1</u>

Hier word die leerlinge nou gekonfronteer met bewerkings met heelgetalle, waar daar dan ook in die notasie onderskeid gemaak word tussen bewerkingstekens en die tekens van getalle. Laasgenoemde word met ´n verhewe (elevated) teken aangetoon.

Taakkaart B1 bevat 20 bewerkings met negatiewe en positiewe heelgetalle, van die volgende aard:

1. $a - b \; ; \; b > a$
2. $^{-}a - b \; ; \; a > b$
3. $a - b \; ; \; a = b$

8. $^{-}a + {}^{-}b \; ; \; b > a$
9. $^{-}a + {}^{-}b \; ; \; a > b$
10. $a \times {}^{-}b$

4. $a + {}^{-}b$; $a = b$

5. $a + {}^{-}b$; $b > a$

6. $a + {}^{-}b$; $a > b$

7. ${}^{-}a + {}^{-}a + {}^{-}a$

11. ${}^{-}a \times b$

12. $a - {}^{-}b$; $b > a$

13. ${}^{-}a - {}^{-}b$; $a > b$

14. ${}^{-}a - {}^{-}b$; $b > a$

15. ${}^{-}a - {}^{-}b$; $b = 0$

Die probleme is in orde van moeilikheidsgraad, soos bepaal deur Murray na die uitslag van soortgelyke skriftelike toetse van 2590 hoërskoolleerlinge (sts. 7 en 8) (*Murray, 1*).

Die probleme word een vir een aan die leerling voorgehou.

1. $5 - 8 =$
2. ${}^{-}8 - 3 =$
3. $7 - 7 =$
4. $7 + {}^{-}7 =$
5. $3 + {}^{-}5 =$
6. $5 + {}^{-}11 =$
7. $8 + {}^{-}5 =$
8. $10 + {}^{-}7 =$
9. $12 + {}^{-}7 =$
10. ${}^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 =$
11. ${}^{-}5 + {}^{-}3 =$
12. ${}^{-}3 + {}^{-}5 =$
13. $3 \times {}^{-}6 =$
14. ${}^{-}6 \times 3 =$
15. $5 - {}^{-}8 =$
16. ${}^{-}5 - {}^{-}2 =$

17. $^{-}8 - {}^{-}3 =$

18. $^{-}5 - {}^{-}8 =$

19. $^{-}7 - {}^{-}7 =$

20. $^{-}12 - {}^{-}4 =$

Sodra ´n antwoord neergeskryf is, vra die onderhoudvoerder om ´n verduideliking van die redenasie wat gevolg is om by die antwoord uit te kom. Dit word dan verbatim neergeskryf.

Nadat Taakkaart B1 voltooi is, word die laaste taakkaart, naamlik D aangebied.

Taakkaart D

1. $5 \times {}^{-}4 =$
2. $^{-}4 \times 5 =$
3. $^{-}4 \times {}^{-}5 =$

Hierdie taakkaart lig die 3 tipes vermenigvuldiging wat met heelgetalle gedoen kan word, uit en is ingelsuit om vas te stel wat leerlinge doen om die geval:

$^{-}a \times {}^{-}b$ (bv. $^{-}4 \times {}^{-}5$) te hanteer.

Geen voor-die-hand-liggende denkhulpmiddel kan hier aangewend word nie en dit is ook nie logies maklik verklaarbaar nie.

Dit sluit dan die onderhoud af.

ii) Algemeen:

* Elke onderhoud duur ongeveer 30 tot 45 minute, indien Taakkaart B1 wel aangepak word.
* Die leerlinge het geredelik saamgewerk en dit het nie geblyk dat dit vir hulle ´n besonder spanningsvolle situasie was nie.
* Hulle skyn bereid te wees om negatiewe getalle te aanvaar, of hulle hantering daarvan korrek is of nie.
* Baie leerlinge verduidelik hulle eie metodes en denkprosesse moeilik. Daar is ´n neiging by die kinders om bloot die wiskundige sin te artikuleer in ´n volsin:

  5 - 8 = 3: *jy het vyf en as jy ag aftrek, het jy 3 oor.*

Sou die onderhoudvoerder verder uitvra, bestaan die moontlikheid dat hy die kinders woorde in die mond lê of ´n antwoord suggereer.

4.3. Resultate van die 40 onderhoude met st.6-leerlinge:

12 onderhoude word by B3 gestaak

1 onderhoud word by B2 gestaak

12 onderhoude word by C2 gestaak

3 onderhoude word by C1 gestaak.

12 onderhoude gaan deur na B1

Twaalf onderhoude word end uit gevoer. Vier van hierdie onderhoude is gevoer met leerlinge van ´n bepaalde laerskool waar die leerlinge wel aan negatiewe getalle bekendgestel was.

Twee leerlinge uit die oorblywende agt is standerdherhalers wat reeds die vorige jaar heelgetalle gedoen het. ´n Verdere twee herhalers met wie die onderhoude onderskeidelik by B3 en C2 gestaak is, word met taakkaart B1 gekonfronteer twee weke na die oorspronklike onderhoude.

(Die resultate van hierdie onderhoude word opgeneem in die frekwensietabel (Tabel 7) van hierdie hoofstuk.)

4.3.1. Interessante benaderings by voorbereidende taakkaarte:

a) Taakkaart B2

Chantal lees die bewerkings as volg:

4 - 1 : *Vier van een is drie*

4 - 5 : *Vier van vyf is een.*

Sy is dan die enigste een wie se onderhoud by B2 gestaak is. In die lig van inligting wat later in die ondersoek aan die lig gekom het, moes die onderhoud voortgegaan het, maar die onderhoudvoerder het dit aanvanklik nie so geïnterpreteer nie.

b) Taakkaart C2

'n Leerling, Vicky, (15:0) het hier alle moontlike foutiewe denkpaadjies geloop:

$0 - 2 = 0$ (vriespunt is die onderste bewerkingsgrens)

$^{-}10 + 5 = 15$ (ignoreer die negatiewe teken van die eerste getal)

$^{-}4 - 2 = {}^{-}2$ (rigting van die bewerkings is foutief)

$^{-}3 - 5 = 8$ (?)

By taakkaart C2 was daar ook twee leerlinge, Erina (13:9) en Catherine (13:5) wat die eerste getal se teken ignoreer, maar tog die geval a - b; b > a korrek hanteer.

Herhalers:

Nadat die 40 onderhoude voltooi is, het die onderhoudvoerder besef dat 4 van die leerlinge herhalers is, wat dus wel in st.6, die vorige jaar, onderrig in negatiewe heelgetalle ontvang het.

Met twee van hierdie leerlinge is die onderhoud wel tot by B1 en D gevoer, maar met twee van hulle is die onderhoud voor B1 en D gestaak.

By Francois (14:6) is die onderhoud by B3 gestaak na 'n instemmende antwoord op:

> Is 9 - 4 = 4 - 9 ?
>
> Sy rede: *As jy 9 het en jy vat 4 daarvan dan het jy 5. As jy weer 4 van 9 vat, het jy ook 5.*

Cheryll (14:0) se onderhoud is tot by C2 gevoer. Sy het vir alle temperatuurverskuiwings op die termometer 'n positiewe antwoord neergeskryf, sonder om hoegenaamd na die termometer te kyk of 'n poging aan te wend om dit as hulpmiddel te gebruik.

Francois en Cheryll is 'n week na die oorspronklike onderhoud, tog met B1 gekonfronteer. Op hierdie stadium het hulle alreeds in die skool met negatiewe heelgetalle begin. Francois het volgehou:

> 5 - 8 : *Kan nie gedoen word nie, want jy kan nie 8 van 5 aftrek nie*

Verder was daar nie 'n spesifieke wanbegrip wat geïdentifiseer kon word nie. Sy verduidelikings het onwillekeurig die idee van "no method in his madness" laat ontstaan.

Dit blyk dat hy nie onderskei tussen bewerkingstekens en tekens van getalle nie:

> ${}^-5 + -3 = {}^-2$ *Jy het* ${}^-5$. *Trek nou* ${}^-3$ *af, dan het jy* ${}^-2$.

Cheryll toon dieselfde onsensitiwiteit vir die verskil tussen tekens van getalle en bewerkingstekens.

$5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$ *5 trek af 8 gee 3.*

Verder pas sy die "toetsmetode" vir die antwoord van 'n aftreksom sonder diskresie toe by ${}^{-}5 - {}^{-}2$, ${}^{-}8 - {}^{-}3$, ${}^{-}5 - {}^{-}8$, ${}^{-}12 - {}^{-}4$.

Hierdie metode ontwikkel by (6):

$5 + {}^{-}11 = {}^{-}6$ *Elf trek af vyf is ses.*

Die onderhoudvoerder vra hierop: *Hoekom skryf jy ${}^{-}6$?*
Sy verander toe die teken na plus en sê: *Vyf trek af 11 is ses en 5 + 6 = 11.*
Daarna gebruik sy hierdie metode deurgaans.

4.4 Tendense wat voortspruit uit die hantering van taakkaart B1 deur die 40 st.6-leerlinge.

4.4.1 Analogie met positiewe getalle

Vier leerlinge pas hierdie metode toe in die gevalle ${}^{-}a \times b$ en ${}^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4$.

Twee van die leerlinge gebruik ook hierdie strategie in die geval ${}^{-}a + {}^{-}b$, $a \times {}^{-}b$, ${}^{-}a - {}^{-}b$.

Hierdie tendens dui daarop dat die leerlinge redeneer dat hulle ´n sekere bewerking met positiewe getalle op ´n sekere manier uitvoer en dat hulle dan ´n analoë metode gebruik as dit negatiewe getalle is. Een van die leerlinge, Lindie, se verduideliking van $^{-}7$ - $^{-}7$ = 0 (*7 - 7 = 0 en +0 en $^{-}0$ is dieselfde*) is sprekend van die manier waarop hulle redeneer: *sou die twee getalle negatief wees, dan jou antwoord ook, nadat die bewerking asof met positiewe getalle uitgevoer is.* Dit is van waar die idee, wat bewys is deur die onderhoude, ontstaan het dat leerlinge bewerkings met getalle met dieselfde tekens makliker uitvoer.

4.4.2 <u>Optelling is die inverse bewerking van aftrekking of ^{-}a is die optellingsinverse van a</u>.

Jan druk die idee die beste uit in sy verduideliking van 7 + $^{-}7$ = 0. *Jy moet sewe aftrek om op te maak vir die negatief.*

Laurette gaan as volg te werk:

> 5 + $^{-}11$, *Koop 11 by 5 om by nul te kom, dan is elf minus vyf, minus ses.*

Die leerlinge wat hierdie strategie gebruik, "leen" by die getal met die grootste absolute waarde om die ander getal gelyk aan nul te stel, bv. 5 + $^{-}11$: *5 - 5 = 0 en dan is daar nog $^{-}6$ van die $^{-}11$ oor.*

4.4.3 Die vertikale getallelyn.

Die leerlinge wat hierdie metode gebruik, redeneer met die termometer voor oë. Hulle sal byvoorbeeld sê by 5 - 8: *Ag van vyf afgetrek is ⁻3.* Hoekom ⁻3? *Die gradewyser het gewys dis onder vriespunt.*

D.w.s. die termometer as denkhulpmiddel word hier gebruik.

4.4.4 Werk vanaf die kleinste getal.

Hier is 'n paar metodes ter sprake,

* die leerlinge werk op die vertikale getallelyn opwaarts.

* in die gevalle waar die kleinste getal (die negatiewe getal) laaste staan, pas hulle die kommutatiewe wet toe

  Bv. $3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$, *vanaf ⁻5 tel 3 op*

  $^{-}8 - 3 = {}^{-}11$, *jy het ⁻8, tel dan nog 3 af*

'n Probleem ontstaan egter waar die bewerkingsteken en die tweede getal se teken dieselfde is, want dan volg die volgende foutiewe antwoord:

$^{-}5 - {}^{-}8$, *Jy het ⁻8, tel nog 5 af, dis ⁻13.*

(Malan, 1987, het ook bevind dat 'n hoë persentasie van leerlinge wat die getallelyn vir hierdie geval benut, foute maak.)

Wat dus ook hier ter sprake kom en aan leerlinge in ´n onderrigsituasie uitgeklaar sal moet word, is dat die teken van die getal en die bewerkingsteken, saam die rigting van die bewerking beïnvloed. Die geskiktheid van die getallelyn as konsepsuele hulpmiddel vir hierdie geval moet bevraagteken word.

Daar is ook sekere tendense te bespeur wat ´n foutiewe antwoord lewer, maar insiggewend is ten opsigte van die leerling se interpretasie en die gapings in sy abstraheringsnetwerk.

Terselfdertyd moet erken word dat dit baie moeilik is om die leerlinge se strategieë presies uit te ken, want:

* hulle formuleer swak.
* hulle verskaf nie altyd geredelik ´n ware uiteensetting van werkswyse nie, maar artikuleer bloot die gegewe bewerking.
* hulle wiskundige woordeskat is onder verdenking, dus, om maar een voorbeeld te noem: een leerling sê vir $^{-}a - {}^{-}b$: *Tel a en b bymekaar en sit die minusteken voor die antwoord.* Is dit nou ´n ontoereikende verduideliking van wat eintlik analogie met positiewe getalle is, of is dit die wanopvatting wat behels dat jy die getalle se tekens ignoreer en bloot ´n negatiewe teken in jou antwoord akkomodeer as daar een of

twee getalle met negatiewe tekens in die bewerking was?

Samehangend met bogenoemde probleem:

* Die leerlinge verander dikwels van strategie wanneer verskillende voorbeelde van dieselfde bewerkingsgeval gedoen word.
* ´n Uitvraery om meer lig op die verduideliking te werp, kan hulle woorde in die mond lê of implisiete onderrig wees.

4.4.5 <u>Die volgende tendense wat wiskundig foutief is, maar in sommige gevalle ook die regte antwoord verskaf, is bespeur</u>:

a). Al die tekens word as bewerkingstekens beskou of die teken van die laaste getal, indien negatief, word ook as ´n bewerkingsteken beskou.

$$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = 4 + 4 + 4 - 4 - 4 - 4 = 0$$

of $3 \times {}^{-}6 = 3 \times 6 - 6 = 12$

b). Daar word ´n blokkie wat ingevul moet word, tussen die bewerkingsteken en die teken van die getal gesoek of dit word geïnterpreteer dat daar niks is om te bereken nie.

Bv. $^{-}5 - {}^{-}8$, *daar is niks om van die* $^{-}5$ *af te trek nie, dan is dit* $^{-}5 - 8$.

c). Die oënskynlike verskil tussen die bewerkings optel en aftrek en die proses van optel en aftrek as die tekens van die getalle verskil, verwar die leerlinge, maar baie gebruik dit dan tog so,

$3 + {}^{-}5 = 2$ *Dit is verskil tussen 3 en 5*
(Foutief)

$12 + {}^{-}7 = 5$ *Twaalf minus sewe is vyf.*

d). Die tekens van die getalle, indien negatief, word geïgnoreer en ´n negatiewe teken word bloot by die antwoord geplaas.

$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$, *8 - 3 = 5, toe sit ek ´n minus vooraan*

$^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8$: *Ek kan nie ⁻5 plus ⁻3 doen nie, toe neem ek 5 + 3 en sit ´n minus voor aan, want dis ⁻5.* (Toevallig reg!)

Hierdie st.6-leerlinge se strategieë laat die idee ontstaan dat hulle veral die negatiewe teken van die eerste getal as aanduider van die teken van die antwoord beskou.

e). Hulle gebruik ´n minusteken in die antwoord as aanduider dat die probleem na regte nie gedoen kan word nie.

$5 - 8 = {}^{-}3$ *Jy kan nie 8 van 5 aftrek nie, jy moet minus skryf.*

f). Die desimale breuk as aanduider dat die antwoord nie ´n telgetal is nie.

5 - ⁻8 = 0,3 *want jy kan nie 8 van 5 aftrek nie.*

5 - ⁻8 = 0,11: *5 - 8 = 0,3 en ⁻3 - 8 = 0,11*

Dis ´n kombinasie van die desimale breuk as aanduider dat die getal kleiner is as 0 - of as 1, soos sommige sê - en al die negatiewe tekens as bewerkingstekens beskou

g). Onsensitiwiteit vir negatiewe tekens:

Sommige leerlinge ignoreer bloot die negatiewe tekens van getalle: ⁻5 + ⁻3 = 8, *want 5 + 3 = 8.*

Dit mag wees omdat hulle nie regtig weet wat om daarmee te maak nie, òf dit mag wees dat hulle dink dit maak nie regtig saak of dit ⁻3 of 3 is nie.

Ander sal sê: 5 - ⁻8: *Jy het 5 en trek 8 af.*
Hulle skyn onaangeraak te wees deur die betekenis van die teken van die getal.

(Soortgelyke foutiewe strategieë is deur Van der Merwe (1986) by leerlinge in KwaZulu geïdentifiseer).

4.5 Interessante tendense by die vier leerlinge wat in st.5 onderrig in negatiewe heelgetalle ontvang het.

4.5.1 Onsensitiwiteit vir negatiewe tekens:

Drie van die vier leerlinge sê in 'n paar gevalle:

Trek 3 af, waar die probleem lees $- {}^{-}3$.

In hul bewerking bring hulle dan tog wel $^{-}3$ in berekening. Dit skep die indruk dat hulle dink dat die teken van die getal van minder belang is. Hierdie idee word versterk deur ondervindinge met sts.6, 7 en 8-leerlinge in Wiskunde-onderrig.

Sou jy vra: *Wat is die koëffisiënt van x^2 in $^{-}3x^2 + 1$ =?* dan kry jy die antwoord : *Drie.*
Sou jy opmerk: *Nee, dis nie drie nie*, kom die antwoord, *O, dan minus drie*, asof die verskil in teken nie regtig saak maak nie.

Die hipotese wat hieromtrent gevorm kan word, is dat, omdat ons in die onderrig nie duidelik onderskei tussen bewerkingstekens en die tekens van getalle nie, leerlinge nie 'n skerpontwikkelde sensitiwiteit vir laasgenoemde het nie.

4.5.2 Verskil tussen die optel- of aftrekbewerking en die proses van optel en aftrek in berekenings met heelgetalle.

Een leerling, Jan, beskou dit as 'n gewigtige saak en het heel duidelik iets daarvan begryp.

Hy redeneer: *$^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8$. Dit word nie $^{-}2$ nie, maar $^{-}8$; $3 + {}^{-}5 = 2$. Dis die verskil tussen 3 en 5.*

Hy skoei al die motiverings in toepaslike gevalle op hierdie lees.

Dieselfde leerling gee die volgende verduideliking vir

$7 + {}^{-}7$: *Jy moet 7 aftrek om op te maak vir die negatief.*

Hy het dus iets daarvan verstaan dat optelling die inverse bewerking van aftrekking is.

4.5.3 Wanopvattings wat ten spyte van onderrig bly vassteek het.

Soos by die intuïtiewe hantering van bewerkings met negatiewe getalle, vind ons ook by hierdie vier leerlinge:

* Die negatiewe tekens by beide eerste en tweede getal word soms geïgnoreer. (Al vier leerlinge het dit gedoen.)

* Die eerste getal se teken word gebruik as ´n bepaler van die antwoord se teken. (Drie van die vier leerlinge pas dit toe.)
* Die minusteken word gebruik as aanduiding dat die bewerking eintlik nie uitvoerbaar is nie;

  5 - 8 = ¯3 : *Ek kan nie 8 van 5 aftrek nie; dus moet ek minus skryf.*

  Twee leerlinge volg hierdie redenasie.
* Twee tekens langs mekaar word vertolk:

  7 + ¯7 : Hulle gee nie ´n getal wat jy by 7 moet tel nie; dus word dit 7 - 7 en dit is 0.

  Twee leerlinge redeneer so.

Om algemene tendense te identifiseer, bly egter baie moeilik, want die leerlinge is inkonsekwent in hul hantering van verskillende voorbeelde van dieselfde geval, die metode wat hulle volg en die aanwending van denkhulpmiddele. Opvallend is egter dat geeneen van hierdie leerlinge die skuldkonsep of die horisontale getallelyn as denkhulpmiddel aangewend het nie.

4.6 <u>Resultate van die 9 st.6-leerlinge vir taakkaart B1</u>.

Hieronder volg ´n tabel met resultate van die vier leerlinge wat reeds in st.5 onderrig in negatiewe heelgetalle ontvang het en vier st.6-herhalers en daarna ´n tabel met die resultate van die 6 leerlinge wat nog nooit voorheen onderrig in negatiewe heelgetalle ontvang het nie.

Tabel 6.

	Prestasiepeile	
	St.5 (4)	St.6-herhalers (4)
Bewerkingsgeval	Absolute frekw.	Absolute frekw.
$a - b \; ; \; b > a$	4	3
$^-a + {}^-b \; ; \; a > b$	4	2
$^-a + {}^-b \; ; \; b > a$	4	3
$a \times {}^-b \; ;$	2	2
$^-a \times b \; ;$	3	3
$a + {}^-b \; ; \; a > b$	3	4
$a + {}^-b \; ; \; b > a$	3	2
$^-a - {}^-b \; ; \; a > b$	3	2
$^-a - b \; ;$	1	1
$^-a \times {}^-b \; ;$	0	0
$^-a - {}^-b \; ; \; b > a$	1	0
$a - {}^-b \; ; \; b > a$	0	2
$7 - 7$	4	1
$7 + {}^-7$	3	2
$^-7 - {}^-7$	3	4
$^-4 + {}^-4 + {}^-4$	4	2

Frekwensietabel met prestasiepeile.

Interpretasie van die frekwensietabel.

Dit is baie moeilik om in die geval van die herhalers ´n tendens te isoleer, want hulle skep die indruk (uit die verduidelikings in hul antwoorde) dat hulle verdwaal is in ´n doolhof van minusse wat hulle telkens laat stuit by ´n cul de sac.

Die vier leerlinge wat in st.5 reeds onderrigin heelgetalle ontvang het,se frekwensietabel stem min of meer ooreen met die frekwensietabel van die ander vyf st.6-leerlinge wat nog nie onderrig ontvang het nie, sover dit moeilikheidsgraad van spesifieke gevalle aangaan.

Die hoogste prestasiepeile (100%) is in die gevalle:

$a - b$; $b > a$; bv. $5 - 8$

$^-a + {}^-b$; $a > b$; bv. $^-5 + {}^-3$

$^-a + {}^-b$; $b > a$; bv. $^-3 + {}^-5$

$7 - 7$

$^-4 + {}^-4 + {}^-4$

Hierdie gevalle is dan ook gevalle wat soos later in die ondersoek blyk, maklik hanteer word na analogie van positiewe getalle deur kinders wat nog nooit voorheen onderrig in negatiewe heelgetalle ontvang het nie.

Die laagste prestasiepeile is in die gevalle:

$^-a - b$; $^-8 - 3$ [25%]

$^-a \times {}^-b$; $^-4 \times {}^-5$ [0%]

$^-a - {}^-b$; $b > a$ [25%]

$a - {}^-b$; $b > a$ [0%]

Hierdie gevalle stem ook ooreen met die gevalle wat kinders sonder vorige onderrig moeilik hanteer. Interessant is egter dat die geval $^-a \times {}^-b$, bv. $^-4 \times {}^-5$, wat as baie maklik deur hoërskoolleerlinge (sts.7 en 8) in die skriftelike toetse hanteer word omdat hulle 'n reël ken om hierdie geval te hanteer, deur geen van die vier leerlinge korrek gedoen is nie. Daar het dus nie vaslegging van die reël plaas gevind nie.

Tabel 7.

Bewerkingsgeval	Prestasiepeile	
	Absolute frekw.	%
$a - b \; ; \; b > a$	2	40
$^{-}a + {}^{-}b \; ; \; a > b$	3	60
$^{-}a + {}^{-}b \; ; \; b > a$	3	60
$a \times {}^{-}b$	4	80
$^{-}a \times b$	4	80
$a + {}^{-}b \; ; \; a > b$	2	40
$a + {}^{-}b \; ; \; b > a$	2	40
$^{-}a - {}^{-}b \; ; \; a > b$	1	10
$^{-}a - b$	4	40
$^{-}a \times {}^{-}b$	0	0
$^{-}a - {}^{-}b \; ; \; b > a$	2	20
$a - {}^{-}b \; ; \; b > a$	0	0
$7 - 7$	5	100
$7 + {}^{-}7$	3	60
$^{-}7 - {}^{-}7$	1	10
$-4 + -4 + -4$	4	80

Frekwensietabel met prestasiepeile van die 5 leerlinge wat nog nooit voorheen onderrig in negatiewe heelgetalle ontvang het nie.

Hierdie tabel maak voorsiening vir 5 leerlinge. Die sesde leerling, Annè (13:10), was baie huiwerig en verskrik gedurende die onderhoud. Sy het haar antwoorde baie stadig en huiwerig verskaf. By C2 het sy vir elke geval graad vir graad op die termometer getel. By C1 het sy teruggeval op die wanopvatting dat 4 - 6 en 4 - 9 nie gedoen kan word nie.

By B1 het sy hiermee volgehou vir: 5 - 8

Vir (2) $^{-}8 - 3$ het sy gesê dit kan nie en toe: *Ek weet nie, ek het nog nooit sulke somme gesien nie. Hulle gee dan niks wat jy 8 van kan aftrek nie.* Sy is gevra om nog 'n probleem aan te pak, maar het nie kans gesien nie. Die onderhoud is toe gestaak.

<u>Interpretasie van die frekwensietabel.</u>

Die hoogste prestasiepeile kom voor by:

$7 - 7$: (100%)

$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4$: (80%)

$a \times -b$; 4×-5 : (80%)

$-a \times b$; -4×5 : (80%)

Dit korreleer met die hoogste prestasiepeile by die vorige twee groepe. Weer eens is dit die gevalle wat baie maklik deur analogie met positiewe getalle hanteer word.

Die laagste prestasiepeile kom voor by:

$^{-}a \times {}^{-}b$; $^{-}4 \times {}^{-}5$: (0%)

$a - {}^{-}b$; $5 - {}^{-}8$: (0%)

$^{-}a - {}^{-}b$; $a > b$: (10%)

$^{-}7 - {}^{-}7$: (10%)

$^{-}a - {}^{-}b$; $b > a$: (20%)

Drie gevalle stem ooreen met die vorige groepe, maar $^{-}a - {}^{-}b$; $a > b$: bv. $^{-}12 - {}^{-}4$ en $^{-}7 - {}^{-}7$ lewer enigsins verbasende resultate aangesien hierdie gevalle deur die laerskoolleerlinge baie gemaklik hanteer is deur analogie met positiewe getalle.

Vyf leerlinge is egter nie 'n verteenwoordigende groep nie en soos reeds gesê, was hulle oor die algemeen inkonsekwent in hul hantering van verskillende voorbeelde van dieselfde soort.

4.7 <u>Rekenstrategieë wat gebruik is deur die 8 leerlinge wat reeds onderrig in negatiewe heelgetalle ontvang het</u>.

4.7.1 <u>Rekenstrategieë gebruik deur 4 leerlinge wat in st.5 aan negatiewe heelgetalle bekendgestel is.</u>

a − b, b > a , 5 − 8

5 - 8 = ⁻3, *want jy kan nie 8 van 5 aftrek nie, jy moet minus skryf.*

5 - 8 = ⁻3, *want 5 + 3 = 8 en 3 bly oor.*

5 - 8 = ⁻3, *want jy kan nie 8 van 5 aftrek nie, maar wel 5 van 8, dan is dit -3, dis soos 'n res.*

⁻a + ⁻b, a > b, ⁻5 + ⁻3

⁻5 + ⁻3 = ⁻8, *want dit word nie ⁻2 nie, maar ⁻8, want dis altwee negatief.*

⁻5 + ⁻3 = ⁻8, *ek kan dit doen nie, toe doen ek 5 + 3 = 8 en sit 'n minus vooraan.*

⁻5 + ⁻3 = ⁻8, *dit is 5 + 3 en sit 'n minus vooraan.*

⁻a + ⁻b, b > a, ⁻3 + ⁻5

Dieselfde drie strategieë as by vorige geval is gebruik.

$a \times {}^{-}b$, $3 \times {}^{-}6$

$3 \times {}^{-}6 = {}^{-}18$, *want 3 x 6 = 18.*

$3 \times {}^{-}6 = {}^{-}18$, *want 3 x 6 = 18 en minus ses is nog nie ´n heelgetal nie, daarom $^{-}18$.*

$3 \times {}^{-}6 = 3$, *hulle gee nie ´n getal om met 3 te maal nie, dan is die 6 - 3 = 3.*

${}^{-}a \times b$, ${}^{-}6 \times 3$

Dieselfde drie strategieë as in vorige geval word gevolg, asook

${}^{-}6 \times 3 = +12$, $6 \times 3 = 18$ en dan $18 - 6 = 12$, want 6 is nog nie ´n heelgetal nie.

${}^{-}a \times {}^{-}b$, ${}^{-}4 \times {}^{-}5$

${}^{-}4 \times {}^{-}5 = {}^{-}20$, *want 4 x 5 = 20 en ek het minusse gevat.*

${}^{-}4 \times {}^{-}5 = {}^{-}1$, *want 4 - 5 = 1 en dis $^{-}1$, want dis $^{-}4$.*

$a + {}^{-}b$, $a > b$ bv. $12 + {}^{-}7$

$12 + {}^{-}7 = 5$, *dis die verskil tussen 12 en 7.*

$12 + {}^{-}7 = {}^{-}19$, *12 + 7 en sit ´n minus vooraan.*

$12 + {}^{-}7 = {}^{-}5$, *jy het 12 en dan minus jy 7.*

$12 + {}^{-}7 = {}^{-}5$, *jy het 12 en dan is daar niks om te plus nie, dan minus jy 7.*

$^-a - {}^-b$, $a > b$ bv. $^-5 - {}^-2$

$^-5 - {}^-2 = {}^-7$, *$^-5$ minus $^-2$ maak $^-7$.*

$^-5 - {}^-2 = {}^-3$, *want $5 - 2 = 3$ en sit ´n minus vooraan.*

$^-5 - {}^-2 = {}^-3$, *want $^-5$ neem weg 2 is $^-3$.*

$^-5 - {}^-2 = {}^-3$, *jy het $^-5$, dan is daar niks om af te trek nie, en dat trek jy $^-2$ af.*

$^-a - b$, $a > b$, $^-8 - 3$

$^-8 - 3 = {}^-5$, *want $8 - 3 = 5$ en 8 en 3 is negatief.*

$^-8 - 3 = {}^-5$, *$8 - 3$ en sit ´n minusteken vooraan.*

$^-8 - 3 = {}^-11$, *$^-8$ bly $^-8$ en dan minus jy weer 3.*

$^-a - {}^-b$, $b > a$, $^-5 - {}^-8$

$^-5 - {}^-8 = {}^-3$, *want $8 - 5 = {}^-3$.*

$^-5 - {}^-8 = {}^-3$, *want $5 - 8 = 3$.*

$a - {}^-b$, $b > a$, $5 - {}^-8$

$5 - {}^-8 = {}^-3$, (raaiskoot)

$5 - {}^-8 = {}^-3$, *dis $8 - 5$ en dis ´n minus 8, daarom $^-3$.*

$5 - {}^-8 = {}^-3$, *Jy het 5, dan´s daar nie ´n getal om af te trek nie, dan´s dit $5 - 8 = {}^-3$.*

$7 - 7 = 0$

$7 - 7 = 0$: As jy 7 het en jy neem 7 weg, het jy nul

$7 + {}^-7$

$7 + {}^-7 = 0$ (7 plus minus 7 is nul).

$7 + {}^-7 = 0$ *Jy het sewe en daar's niks om by te tel nie, dan's dit $7 - 7 = 0$.*

$7 + {}^-7 = 0$. *Jy moet sewe aftrek om op te maak vir die negatief.*

${}^-7 - {}^-7$

${}^-7 - {}^-7 = {}^-14$ *${}^-7$ minus ${}^-7$ is ${}^-14$.*

${}^-7 - {}^-7 = {}^-0$ *$7 - 7 = 0$ en $+ 0$ en ${}^-0$ is dieselfde*

${}^-7 - {}^-7 = 0$, *want 7 minus 7 is nul.*

${}^-7 - {}^-7 = 0$, *want $7 - 7 = 0$ en nul is nul, dit help nie om 'n minus vooraan te sit nie.*

${}^-4 + {}^-4 + {}^-4$

${}^-4 + {}^-4 + {}^-4 = {}^-16$, *want dis vier negatiewe viere.*

${}^-4 + {}^-4 + {}^-4 = {}^-12$, *want $4 + 4 + 4 = 12$ en sit 'n minus vooraan.*

${}^-4 + {}^-4 + {}^-4 = {}^-12$, *want ek het die minusgetalle bymekaargetel.*

4.7.2 <u>Rekenstrategieë gebruik deur die vier st.6-herhalers met wie onderhoude gevoer is</u>.

a − b, b > a, 5 − 8

5 − 8 = ⁻3, *want dit kan nie +3 wees nie.*

5 − 8 = ⁻3, *want ek kan nie 8 van 5 aftrek nie, toe sê ek net nog 'n getal wat 8 gaan gee.*

5 − 8 = ⁻3, *8 trek af 5 is 3. Waarom ⁻3? Want dis ⁻8.*

5 − 8 = *kan nie, want 8 > 5.*

⁻a + ⁻b, a > b, ⁻5 + ⁻3

⁻5 + ⁻3 = ⁻8, *tel net op.*

⁻5 + ⁻3 = 8, *want 5 + 3 = 8.*

⁻5 + ⁻3 = ⁻2, *jy het ⁻5. Trek ⁻3 af, dan het jy -2*

⁻a + ⁻b, b > a, ⁻3 + ⁻5

⁻3 + ⁻5 = ⁻8, *ek het hulle bymekaargetel.*

a x ⁻b, 3 x ⁻6

3 x ⁻6 = 18, *⁻6 maal 3 is ⁻18*

3 x ⁻6 = 0. *ek kan nie 3 met ⁻6 maal nie, want ⁻6 = 0*

3 x -6 = -60, *6 x 6 x 6* (Dit is die tipe antwoord wat verskaf word deur Francois, reeds genoem).

^{-}a x b, $^{-}6$ x 3

$^{-}6 \times 3 = {}^{-}2$, *want 3 x 2 = 6.*

$^{-}6 \times 3 = {}^{-}18$, *want 6 x 3 = 18.*

^{-}a x ^{-}b, $^{-}4$ x $^{-}5$

$^{-}4 \times {}^{-}5 = {}^{-}20$, *want 4 x 5 = 20 en ek het minusse gevat.*

a + ^{-}b, a > b, 8 + $^{-}5$

$8 + {}^{-}5 = 3$, *dis plus 8, daarom +3.*

$8 + {}^{-}5 = 3$, *tel $^{-}5$ by 8.*

$8 + {}^{-}5 = 3$, *jy trek 5 van 8 af.*

$8 + {}^{-}5 = 3$, *jy het 8, trek $^{-}5$ van 8 af.*

a + ^{-}b, b > a, 3 + $^{-}5$

$3 + {}^{-}5 = 8$, *drie plus en minus 5 is plus 8.*

$3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$, *jy het 3 en moet $^{-}5$ aftrek.*

$3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$, *jy het $^{-}5$ en moet 3 bytel.*

$3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$, *jy het $^{-}3$ en $^{-}5$, vat 3 van $^{-}5$, dan het jy $^{-}2$.*

^{-}a − ^{-}b, a > b, $^{-}5$ − $^{-}2$

$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$, *trek $^{-}2$ van $^{-}5$ af.*

$^{-}5 - {}^{-}2 = 3$, *want 3 + 2 = 5.*

$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$, *want jy het $^{-}5$, trek $^{-}2$ af, dan kry jy $^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$.*

$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$, *want 5 − 2 = 3.*

$^{-}a - b$, $a > b$, $^{-}8 - 3$

$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$, *trek $^{-}3$ van 8 af.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$, *8 trek af 3 is 5 en dis $^{-}5$.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}11$, $^{-}8$ bly $^{-}8$ en dan minus jy weer 3.

$^{-}8 - 3 = {}^{-}11$, *jy kan nie $^{-}8$ van $^{-}3$ aftrek nie.*

$^{-}a - {}^{-}b$, $b > a$, $^{-}5 - {}^{-}8$

$^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$, *daar's twee minusse en jy kan dit 'n plus maak.*

$^{-}5 - {}^{-}8 = 3$, $^{-}5 + 3 = 8$.

$a - {}^{-}b$, $b > a$, $5 - {}^{-}8$

$5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$, *ek het 5 van 8 afgetrek.*

$5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$, *5 trek af 8 gee 3.*

$5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$, *Jy het 5, dan moet jy $^{-}8$ aftrek.*

$5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$, *8 - 5 = 3 maar daar's 'n minus by 8.*

$7 - 7$

$7 - 7 = 0$, *jy het sewe en vat sewe weg.*

$7 + {}^{-}7$

$7 + {}^{-}7 = 0$, *dis 7 - 7, want jy kan nie sê 7 + 7 nie.*

$7 + {}^{-}7 = 0$, *jy het 7 en moet $^{-}7$ daarby plus.*

$7 + {}^{-}7 = {}^{-}1$, *jy het 7 en vat 7 weg.*

$7 + {}^{-}7 = 7$, *jy het 7, trek $^{-}7$ af.*

$^{-}7 - {}^{-}7$

$^{-}7 - {}^{-}7 = 0$, *dit bly dieselfde as 7 - 7.*

$^{-}7 - {}^{-}7 = 0$, *jy het $^{-}7$, trek $^{-}7$ af.*

$^{-}7 - {}^{-}7 = 0$, *jy het $^{-}7$, trek weer $^{-}7$ af.*

$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4$

$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = 0$, *4 trek af 4 is niks, plus nog 4 is niks*

$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = 0$, *$^{-}4 + {}^{-}4 = 0$, $0 + {}^{-}4 = 0$*

4.8 Samevatting

* Daar is min verskil tussen die rekenstrategieë en tendense wat voorkom by die standerdherhalers en leerlinge wat in die laerskool aan negatiewe getalle bekendgestel is en dié wat voorkom by die res. Hier en daar onthou ´n leerling ´n reël wat hulle geleer het, maar oor die algemeen skyn dit nie te lyk asof die onderrig wat die genoemde 8 leerlinge ontvang het, in elk geval hul intuïsies verander het nie.

* Die leerlinge toon nie ´n onwilligheid of ´n weerstand om met negatiewe getalle te werk nie.

* Hulle het ´n intuïtiewe aanvoeling vir negatiewe getalle, alhoewel hulle dit nie konsekwent deurvoer nie.

* Die leerlinge formuleer hul verduidelikings baie moeilik en die onderhoudvoerder is nie seker of dit altyd reg geïnterpreteer word nie.

* Die saak word verder bemoeilik deurdat die leerlinge rondspring van een strategie na ´n ander, alhoewel hulle Taakkaart B1 in die volgorde doen waarin dit aangebied is, dit wil sê waar die tipes bewerkings bymekaar gegroepeer aangebied word.

HOOFSTUK 5

INTUÏSIES TEN OPSIGTE VAN HEELGETALREKENKUNDE BY ST.5-LEERLINGE VOOR ONDERRIG

5.1 Hersiening van verloop van persoonlike onderhoude en taakkaarte

5.1.1 Inleiding

Na die voltooiing, transkripsie en verwerking van die eerste 40 onderhoude, het sekere leemtes hulself uitgewys. Daar is dus deeglik besin voordat die laerskoolonderhoude aangepak is.

5.1.2 Metode van weergawe van die leerling se antwoorde:

Aangesien dit baie moeilik is om verbatim neer te skryf wat die kind sê gedurende die onderhoud, is besluit om voortaan die onderhoud op band te neem soos voorgestel deur F. Lankford (1974 : 26) in sy bespreking van die persoonlike onderhoud. Daar word nog steeds notas geneem gedurende die onderhoud indien ʼn sekere tendens die onderhoudvoerder opval, maar die onderhoud word later getranskribeer.

5.1.3 Die verwydering van hekke:

Slegs 12 van die 40 hoërskoolleerlinge (st.6) voltooi die taakkaarte B1 en D. Met die ander 28 is die onderhoud beëindig omdat hul response op die voorbereidende taakkaarte hulle gediskwalifiseer het. Vier van hierdie 12 leerlinge het in st.5 onderrig ontvang oor negatiewe heelgetalle, dus verloor ons waardevolle inligting van vier-vyfdes (32) van die 40 leerlinge.

Die resultate van die onderhoude met die twee herhalers wat aanvanklik beëindig is maar toe later voltooi is, toon dat, alhoewel sekere konsepte wat as ´n voorvereiste beskou is vir aanvaarding van negatiewe getalle as bewerkingsgetalle, ontbreek, taakkaart B1 tog gedoen kon word, reg of verkeerd.

Verder het die verwerking van hierdie 40 onderhoude aan die lig gebring dat daar nie ruimte gelaat is vir die diepgewortelde *laerskoolkonsep* van: *Jy kan nie ´n groot getal van ´n kleintjie aftrek nie*. Juis hierdie idee dwing kinders om by C1 en C2 vol te hou met 4 - 6: *Dit kan nie*. Dit is egter slegs voorbeeld1 op taakkaart B1 wat hulle weer met hierdie *onmoontlike* bewerking konfronteer.

Daar word gevind dat sommige leerlinge glad nie die werking van ´n termometer begryp of die verskuiwings daarop verstaan nie. Dit is egter glad nie nodig dat hulle hoegenaamd hierdie praktiese inkleding hoef te gebruik om bewerkings op taakkaart B1 te kan doen nie.

Leerlinge, veral laerskoolleerlinge, is geneig om wat hulle as geskrewe sien, te aanvaar as feitelik. Dit mag dus wees dat leerlinge mislei is deur taakkaart B3 waar hulle gevra word:

Is 9 - 4 = 4 - 9 ?

Nadat die laerskoolonderhoude (sonder hekke) afgehandel is, is die juistheid van bogenoemde hipoteses bewys. Leerlinge wat by ´n hek voorgekeer sou word, het goed presteer in B1. Byvoorbeeld ´n seun, Christiaan het vanaf die mees growwe fout: 9 - 4 = 5, 4 - 9 = 5 gevorder tot by: $^{-}5 - ^{-}8 = 3$ grade C ($^{-}8$ grade C > $^{-}5$ grade C en hy sal na ´n hoër een gaan, wat nie minus is nie).

Daar is dus besluit om alle laerskoolleerlinge wat nog aan die projek gaan deelneem, taakkaart B1 aan te bied ongeag hulle antwoorde by die voorbereidende taakkaarte. Daar sou egter wel deeglik kennis geneem word van die aard van die antwoorde by die voorbereidende taakkaarte.

5.1.4 Taakkaart B3

Soos reeds genoem in 5.1.3., kan taakkaart B3 soos aangebied die leerlinge verwar.
Daarom is daar besluit om weg te doen met taakkaart B3.
Sou ´n leerling antwoord: 4 - 9 = 5, skryf die onderhoudvoerder onderaan taakkaart A: 9 - 4 = ?

Sou ´n leerling antwoord 9 - 4 = 5, maar geen poging aanwend om 4 - 9 = 5 te verbeter nie, skryf die onderhoudvoerder onderaan weer 4 - 9 = ?. Of die leerling dan ´n regstelling maak of nie, gaan die onderhoud voort.

5.1.5 Taakkaart B1

Na die eerste veertig onderhoude was dit duidelik dat die orde van maklik na moeilik nie deur die kinders as sulks ervaar word nie. Sommige probleme byvoorbeeld ${}^-a + {}^-b$, bv. ${}^-5 + {}^-3$ en ${}^-a - {}^-b$, $a > b$, bv. $-12 - -4$ word maklik intuïtief hanteer na analogie met positiewe getalle, terwyl leerlinge in die geskrewe toetse (sts.7 en 8) hierdie probleme moeiliker hanteer het as byvoorbeeld $a - b$, $b > a$, bv. $3 - 8$.

Daar is dus besluit om die leerlinge met al die probleme op taakkaart B1 te konfronteer en hulle dan toe te laat om dit in voorkeurorde te doen.

Die 97 laerskoolonderhoude wat hierna onder bespreking kom, is dus op voorgestelde verbeteringe geskoei.

5.2 Veld van Ondersoek.

Die tweede fase van hierdie navorsingsprojek betrek die totale st.5-klasse van twee Afrikaanse laerskole in dieselfde dorp.

Laerskool A het 39 st.5-leerlinge en Laerskool B het 58 st.5-leerlinge.

5.3 Werkswyse:

Die metode van onderhoudvoering soos in hoofstuk 4 uiteengesit, is gevolg met die veranderinge aangebring soos hierbo uiteengesit.
Daar was ook nog steeds leemtes in hierdie betrokke metode wat slegs na vore kom namate met die persoonlike onderhoude met die st.5-leerlinge gevorder is. 'n Kritiese evaluering van die werkswyse word in Hoofstuk 9 gedoen.

Na verloop van 4 tot 6 maande is twintig leerlinge (8 uit Laerskool A en 12 uit laerskool B) vir 'n tweede keer by presies dieselfde onderhoud betrek. Die resultate en vergelykings tussen die aanvanklike en opvolgonderhoude word in Hoofstuk 8 bespreek.

5.4 Resultate van die voorbereidende Taakkaarte:

5.4.1 Taakkaart A:

a) Die volgende antwoorde en strategieë is aangetref:

4 - 9 = 0,5 , *want dit is 'n getal kleiner as nul.*

(1 leerling verskaf hierdie antwoord).

4 - 9 = 0, *want 9 kan nie van 4 afgetrek word nie.*

(10 leerlinge redeneer so).

4 - 9 = *kan nie,* met ´n verskeidenheid redes insluitende: *Jy kan nie ´n grote van ´n kleintjie aftrek nie*

9 > 4

9 is hoër op as 4.

dit moet omgeruil word.

21 leerlinge gaan van hierdie standpunt af uit.

4 - 9= $^-5$, met ´n verskeidenheid redes insluitende:

4 - 4 = 0 en dan is daar nog 5 wat jy moet aftrek.

verduidelik dit met temperature.

verduidelik dit met bo en onder die oppervlak

van water òf redes wat hul begrip onder verdenking plaas:

jy kan nie nege van 4 aftrek nie.

(22 leerlinge verstrek die antwoord, 12 met ´n aanvaarbare rede).

4 - 9 = 5

Aanvanklik verskaf 43 leerlinge hierdie antwoord. Nadat die tweede deel van Taakkaart A afgehandel is, hou 11 leerlinge vol met hul oorspronklike antwoord. Uit die redes wat hulle verskaf, blyk dit dat hulle aftrekking as kommutatief beskou om die probleem op te los.

* 2 lees 4 - 9 as: *Trek 4 van 9 af.*
* 19 sê nou 4 - 9 = *onmoontlik*
* 6 sê 4 - 9 = 0, *want 9 kan nie van 4 afgetrek word nie,*
* 5 sê 4 - 9 = $^{-}5$.
* 6 leerlinge ly aan *die-klok-hoor-lui*-sindroom, nl.: 1 leerling verkeer onder die indruk dat

  4 - 9 = $^{-}4$, *jy neem die eerste getal en skryf hom as antwoord neer met ´n negatiewe teken*

  1 leerling skryf 4 - 9 = $^{-}9$. (Dieselfde rede às hierbo)

  1 leerling skryf onmiddellik ´n minusteken neer, maar weet dan nie hoe om die antwoord te bereken nie.

  3 leerlinge het so iets van negatiewe getalle en die reëls vir bewerkings daarmee by ouer broers en susters gehoor.

b) <u>Interpretasie van die resultate van Taakkaart A:</u>

i) 4 - 9 = 5

Hierdie antwoord word aanvanklik deur 43 leerlinge verskaf (44,3% van die betrokke 97 leerlinge). Dit is duidelik dat die inpak van die idee dat *´n groot getal nie van ´n kleintjie afgetrek kan word nie*, baie sterk is. ´n Verdere 21 leerlinge (21,6%) sê pertinent dat jy nie *´n grote van ´n kleintjie kan aftrek nie*. Hierdie idee is dus vaardig onder 65,9% van die toetspersone. Leerlinge wat onkrities staan teenoor wat in geskrewe vorm aangebied word, aanvaar dat 4 - 9 ´n antwoord moet hê en beskou dus aftrekking as kommutatief om sodoende die probleem te kan oplos.

Nadat die tweede deel van taakkaart A afgehandel is, volhard 11 leerlinge (11,3%) dat 4 - 9 = 5.

Uit hierdie ondersoek blyk dit dus dat aandag gegee moet word aan terminologie en *resepte* in die laerskoolonderrig van Wiskunde wat die kind se bruikbare intuïsies oor meer gevorderde wiskundige begrippe mag strem.

ii) 4 - 9 = onmoontlik.

5 van die 23 leerlinge wat hierdie antwoord gegee het, is gevra om verduidelikings te gee vir hulle antwoorde op die eerste drie elementêre optel- en aftrekbewerkings op Taakkaart A.

In 3 gevalle het die leerlinge hul antwoorde verduidelik aan die hand van ´n konkrete inkleding :

12 - 7 = 5 *As ek twaalf albasters het en ek gee sewe weg, dan het ek 5 oor.*

In al drie hierdie gevalle het hierdie leerlinge 4 - 9 aan die hand van dieselfde konkrete inkleding probeer verduidelik.

As ek vier albasters het, kan ek mos nie nege weggee nie. Hier is dus sprake van ´n *oorveralgemening* van ´n konkrete inkleding, in die sin dat die leerling ´n inkleding van een bewerkingsgeval probeer gebruik vir ´n ander bewerkingsgeval waarby dit nie pas nie.

iii) 4 - 9 = 0,5

Slegs een laerskoolleerling verskaf hierdie antwoord, maar 5 uit die 40 st.6-leerlinge (12,5%) gebruik die desimale breuk om aan te toon dat die antwoord minder as nul is.

Dit is onrusbarend, want dit toon ´n gebrekkige insig in die getalwaarde van desimale breuke.

iv) 4 - 9 = 0

6 Leerlinge (16,2%) verskaf hierdie antwoord met die rede dat 9 nie van 4 afgetrek kan word nie.

5.4.2 Taakkaart B2

Die taakkaart bevat die volgende patroonmatige bewerkings:

4 - 1 =

4 - 2 =

4 - 3 =

4 - 4 =

4 - 5 =

Geen leerling wyk af van die tipe antwoord en rede wat hy by taakkaart A vir 4 - 9 gegee het, wanneer hy Taakkaart B2 se 4 - 5 voltooi nie.

In die lig van wat hierbo in (i) gesê is in verband met wanbegrippe wat intuïtiewe denke strem, sluit die response op taakkaart B2 nou hierby aan. Die patroonmatigheid is heel duidelik, maar bogenoemde wanbegrip verhoed die leerling om intuïtief logies daarop te reageer.

5.4.3 <u>Taakkaart C2 (termometerafbeelding)</u>

a) <u>Skool A</u>:

Die termometerafbeelding word aan al 39 leerlinge aangebied.

* 18 leerlinge doen die verskuiwings korrek.
* 11 leerlinge verstaan nie die werking van die termometer en die verskuiwings wat gedoen moet word nie.

Die volgende wanopvattings en foute kom voor:

* Sommige raak deurmekaar met die rigting van die verskuiwing.

* Sommige begin by die verkeerde aflesing te tel en kry òf $5 + 3 = 9$ òf $5 + 3 = 7$.

* 3 leerlinge werk net tot by nul, dit wil sê hul onderste bewerkingsgrens is nul. In die opvolg-onderhoud van Carla, verseker sy my dat die kwik by 0 grade sal stop.

* 1 leerling steur hom nie aan die termometer nie en beskou die teken van die eerste getal as aanduider van die teken van die antwoord.

  ${}^{-}4 - 3 = {}^{-}1$ $(4 - 3 = 1$ en dis ${}^{-}4)$

* 5 leerlinge maak nie gebruik van die termometer nie en gebruik positiewe grade vir bo en onder vriespunt.

Hugo sê in sy eerste onderhoud dat verskuiwings van die aard ${}^{-}2 + 4$, $2 - 5$ en ${}^{-}3 - 5$ nie gedoen kan word nie, maar dan doen hy die bewerkingsgeval ${}^{-}a - {}^{-}b$, $a > b$ korrek met die rede dat jy hierdie geval kan doen, want dis almal minus. By die herhalingsonderhoud behou hy sy standpunt by C2, maar by B1 doen hy slegs $7 - 7 = 0$ en sê dat die ander bewerkingsgevalle geeneen gedoen kan word nie.

b) <u>Skool B:</u>

i) 47 uit die 58 leerlinge doen die termometerafbeelding.

* 19 leerlinge doen die verskuiwings 100% korrek, van wie 5 glad nie die termometer raadpleeg nie.

* 4 leerlinge begaan rekenfoute, dit wil sê hulle raadpleeg nie die termometer op so ´n wyse dat die onderhoudvoerder sien hulle tel daarop nie, maar sê dan 10 - 7 = 6.

* 1 leerling gebruik glad nie die termometer nie, maar sy antwoorde is van so ´n aard dat ´n mens nie kan bepaal van waarvandaan dit kom nie.

* 9 leerlinge verstaan skynbaar nie die afmetings van ´n termometer nie en tel verkeerd.

* 8 leerlinge interpreteer die bewerking verkeerd en skryf die verkeerde antwoord neer.

* 4 leerlinge skryf vir die bewerkingsgeval a - b, b > a, bv. 3 - 8 : *dit kan nie, of dis nul*. Hier word hulle na die termometer verwys en gevra wat met die kwik sal gebeur. Daarna doen hulle beter. Ria gee egter in ´n opvolgonderhoud die versekering dat die kwik nie laer as nul sal daal nie.

* 2 leerlinge verstaan skynbaar glad nie die werking van die termometer nie en skryf ´n antwoord soos $^{-}3 + 4 = 4$ neer.

Hierdie spesifieke geval kan dalk verklaar word as aanvaar word die leerling beskou $^{-}3$ as gelyk aan nul.

Ria sê ook in haar opvolgonderhoud by ´n later geleentheid, dat as die kwik tot onder 0 grade daal, dit warmer sal word.

Hugo sê by die eerste onderhoud én die herhalingsonderhoud dat die verskuiwings nie gedoen kan word nie.
By die eerste onderhoud het hy die geval $^{-}a - ^{-}b$; $a > b$, bv. $^{-}12 - 4$ korrek gedoen, met die rede:
Jy kan hulle doen, want dis almal minus.
By herhalingsonderhoud doen hy net $7 - 7 = 0$.
Vir al 19 ander gevalle dui hy aan dat dit nie gedoen kan word nie.

ii) Die elf leerlinge wat nie Taakkaart C1 gedoen het nie, het in die beantwoording van Taakkaart A afdoende bewys gelewer dat hulle negatiewe getalle as bewerkingsgetalle aanvaar.

Die onderhoudvoerder wou haar vergewis van hul idees en intuïsies in verband met negatiewe heelgetalle, onbeïnvloed deur die aanbieding van ´n denkhulpmiddel.

´n Paar onderhoude met leerlinge wat wel bewys gelewer het dat hulle bewerkings met negatiewe heelgetalle geredelik uitvoer, het wel ook die termometertaakkaart ingesluit. Die onderhoudvoerder wou vasstel in hoe ´n mate dit hul hantering van C1 en B1 beïnvloed. By hierdie leerlinge was daar in hul verduidelikings by A, soms iets wat nie heeltemal gerym het nie, byvoorbeeld Susan sê: 4 - 9 = ⁻5, want jy kan nie regtig 9 van 4 aftrek nie.

iii) 5 leerlinge word na ´n korrekte antwoord in A, die termometerafbeelding aangebied.

* 1 van hierdie leerlinge gebruik glad nie die termometer om die antwoorde by C2 te verskaf nie.

* 4 van die 5 hanteer die soortgelyke voorbeelde wat nie aan die praktiese inkleding gekoppel is nie, korrek.

Geeneen van die vyf gebruik die termometer of temperatuurwisselinge om hul antwoorde by B1 te verantwoord nie. Ben sê in een geïsoleerde geval:

7 - 7 = 0, want 7 grade trek af 7 grade is nul.

In hierdie gevalle het die aanbieding van ´n denkhulpmiddel nie die kind met reeds-gevormde idees oor negatiewe getalle en hul bewerkingsmoontlikhede, in sy abstraheringsproses gedwarsboom nie en dit is ook nie deur die kind aangegryp as die enigste aanvaarbare manier waarop bewerkings met negatiewe getalle bestaansreg het nie.

Een leerling, Charl, verskaf na hulp eers die regte antwoord op 4 - 9. Hierdie antwoord verduidelik hy self aan die hand van die oppervlak van water: *dit wat onder die water is word met negatiewe getalle aangedui.* Die oppervlaklyn is 0. Hy illustreer dit selfs met ´n skets.

Daar word dus geoordeel dat hy sy eie denkhulpmiddel het en direk na B1 gegaan . Daar word verdere waarnemings versteur deur sy gebrekkige toepassing van reëls vir bewerkings met negatiewe getalle, wat hy by sy ouer broer gehoor het.

´n Ander leerling, Xander, gebruik spontaan twee verskillende denkhulpmiddels. By Taakkaart A verduidelik hy 4 - 9 aan die hand van temperature en by B1 (1) 5 - 8, swaai hy spontaan om na die skuldidee wat hy baie effektief gebruik in die geval: $^{-}5$ - $^{-}8$, maar nie korrek toepas op 5 - $^{-}8$ nie. Dit lyk egter of hy vanaf die vyftiende bewerking, 5 - $^{-}8$ tot die 18de bewerking $^{-}5$ - $^{-}8$ vorder om te besef - $^{-}$ beteken: trek skuld af (in sy terme).

Japie gebruik by B1 die temperatuurveranderings of dan die vertikale getallelyn, baie sterk. By C2 het hy die aangebode skets slegs by die laaste verskuiwing gebruik.

Drie leerlinge vra om die afbeelding van die termometer by B1 te gebruik.

c) Probleme wat opgeduik het waar die termometerafbeelding nie gedoen is nie.

Alet beskou alle tekens as bewerkingstekens. Miskien sou verskuiwings van die aard $^{-}a + b$ en $^{-}a - b$ op die termometerafbeelding haar gehelp het om die teken van die eerste getal as sulks te beskou.

Sonet doen nie die termometerafbeelding nie, maar na die vyfde bewerking wat sy doen, verwys ek haar terug na C2, want sy plaas bloot die negatiewe teken van die getalle voor die antwoord. Dit lyk egter nie of die termometer verhelderend is nie, want daarna beskou sy alle tekens as bewerkingstekens.

d) Tendense wat aan die lig kom by die termometerafbeelding.

Daar word tendense waargeneem wat kan dui op ´n grootte-orde probleem. Hierdie indruk word deur die verduidelikings by B1 gestaaf, byvoorbeeld: $^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{+}3$ ($^{-}8 > 5$ en hy sal na die hoër een gaan wat nie minus is nie.)

By C2 begin die vermoede ontstaan dat hulle byvoorbeeld dink dat $^{-}8 > {}^{-}6$. Dit is $^{-}6$ grade en raak 2 grade kouer. Hulle tel heeltemal korrek op die termometer, maar huiwer dan, want die verskil lyk groter as die aftrektal. *Hoekom-vrae* lei egter nie tot 'n pertinente sodanige antwoord nie.

Op die termometer word dikwels verskuiwings gevra met 'n klein verskilletjie tussen die getalle, bv. 2 - 3: Dit is 2 grade C en word 3 grade C kouer.
(Dieselfde beginsel as by B2 geld hier.) Dit lyk asof hierdie voorbeelde hulle meer verwar as getalle met 'n groot verskil, bv. 2 - 7.

Die hipotese is dat dit mag wees omdat daar *min verskil* tussen 0 en 1 is. Hulle voel aan die antwoord moet 1 wees, maar 1 is nie heeltemal korrek nie, dan skryf hulle maar 0.

5.4.4 Taakkaart C1

In 7 gevalle waar op taakkaart A geantwoord is: *Dit kan nie*, het leerlinge by C1 onafhanklik van die praktiese inkleding korrek geantwoord:

$$4 - 6 = {}^{-}2 \text{ en } 4 - 9 = {}^{-}5.$$

In 6 gevalle vra die leerlinge by C1: *Is dit nou daai grade?*

Sommige leerlinge verskaf nie die korrekte antwoord op 4 - 9 by A as hulle deur die tweede deel van A (9 - 4 = en 4 - 9 =)daartoe gelei word nie.

Vier leerlinge verskaf bogenoemde antwoord by A en al 4 antwoord korrek by C1. Leerlinge wat oënskynlik die praktiese inkleding as sulks beskou en die bewerkings by C1 korrek doen,gebruik nie die termometer of verskuiwings daarop by B1 nie. Slegs 1 leerling het een geïsoleerde geval so bereken.

Lucas maak nie die inkleding los van die bewerking by C1 nie, maar wel treffend by B1. Hy sê:

(2) *⁻8 - 3 = ⁻5: Dis mos ook grade C, altans, nie grade nie, maar onder nul.*

Nou het hy vir homself die sprong gemaak.

Wanneer leerlinge by C1 terugneig na hul aanvanklike antwoord by A, het ek gesê: *Dink aan die termometer.* My oorweging was om te verhoed dat waardevolle inligting verlore gaan by B1, maar die nadele van hierdie poging word bespreek in Hoofstuk 7.

5.5 Taakkaart B1

5.5.1 Prestasiepeile van st.5-leerlinge vir Taakkaart B1.

Tabel 8

BEWERKINGSGEVAL	N	FREKWENSIE SKOOL A 39	B 58	A + B 97	PRESTASIEPEILE A	B	A + B	RANGORDE A	B	A + B
1. a - b; b a : 5 - 8		15	37	52	39	63,8	54,2	7	4	5
2. $^-a + {}^-b$; a b : $^-5 + {}^-3$		16	35	51	42	60,3	53,1	6	5	6
3. $^-a + {}^-b$; b a ; $^-3 + {}^-5$		19	34	53	50	58,6	55,2	3	6	4
4. a x ^-b; 3 x $^-6$		15	24	39	39	41,4	40,6	8	12	10
5. ^-a x b; $^-6$ x 3		13	27	40	34	46,6	41,7	9	9	9
6. a + ^-b; a b : 8 + $^-5$		8	26	34	21	44,8	35,4	11	10	11
7. a + ^-b; b a : 3 + $^-5$		7	26	33	18	44,8	34,4	12	11	12
8. $^-a - {}^-b$; a b : $^-5 - {}^-2$		18	37	55	47	63,8	57,4	4	3	3
9. $^-a - {}^-b$; $^-8$ - 3		7	11	18	18	18,9	18,8	13	14	14
10. $^-a - {}^-b$; b a: $^-5 - {}^-8$		2	17	19	5	29,3	19,8	14	13	13
11. a - ^-b; b a: 5 - $^-8$		1	3	4	2	5,2	4,2	15	15	15
12. 7 - 7		38	56	94	100	96,6	97,9	1	1	1
13. 7 + $^-7$		9	33	42	23	56,9	43,8	10	7	8
14. $^-7 - {}^-7$		32	38	70	84	65,5	72,9	2	2	2
15. $^-4 + {}^-4 + {}^-4$		18	28	46	47	48,3	47,9	5	8	7

5.5.2 Rekenstrategieë deur die st.5-leerlinge gebruik.

$a - b$; $b > a$: $5 - 8$

$5 - 8 = {}^{-}3$,	*$5 + 8 = 13$, $5 - 8 = {}^{-}3$, want 8 is 3 meer as 5*
$5 - 8 = {}^{-}3$,	*$5 - 5 = 0$ en 3 moet dan aangaan na nul.*
$5 - 8 = {}^{-}3$,	*Jy kan nie 5 van 8 af minus nie, want $8 > 5$, dan skryf jy ${}^{-}3$.*
$5 - 8 =$	*kan nie, want $8 > 5$.*
$5 - 8 = 0$,	*want 8 kan nie van 5 afgetrek word nie.*
$5 - 8 = 3$:	*Vat 8 en trek 5 af.*
$5 - 8 = 0,3$,	*want dis nie ´n heelgetal nie.*

${}^{-}a + {}^{-}b$; $a > b$: ${}^{-}5 + {}^{-}3$

${}^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8$,	*want $5 + 3 = 8$ en dis onder vriespunt.*
${}^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8$,	*ek het ${}^{-}5$ opgetel met ${}^{-}3$ en dit gee ${}^{-}8$.*
${}^{-}5 + {}^{-}3 = 2$,	*${}^{-}5 + 5 = 5$, $5 - 3 = 2$.*
${}^{-}5 + {}^{-}3 = 5$,	*$5 + 3 = 8$, $8 - 3 = 5$.*
${}^{-}5 + {}^{-}3 = 0$,	*$8 - 5 = 3$; $3 - 3 = 0$.*
${}^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}2$,	*dis ${}^{-}5$ grade toe word dit warmer met ${}^{-}3$, toe is dit ${}^{-}2$.*

${}^{-}a + {}^{-}b$; $b > a$; ${}^{-}3 + {}^{-}5$

${}^{-}3 + {}^{-}5 = {}^{-}8$,	*want $3 + 5 = 8$ en dis onder vriespunt.*
${}^{-}3 + {}^{-}5 = 2$,	*Tel 3 by, dan´s dit 0 grade C en dan bly daar 2 oor.*

$^{-}3 + {}^{-}5 = 2$,	*$^{-}3 + 3 = 3$, $3 - 5 = 2$.*
$^{-}3 + {}^{-}5 =$	*onmoontlik, want $^{-}3 - 3 = 0$, $0 - 5 =$ onmoontlik.*
$^{-}3 + {}^{-}5 = 0$,	*$8 - 3 = 5$, $5 - 5 = 0$.*
$^{-}3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$,	*Dit is $^{-}3$ grade, word dan warmer met $^{-}5$, toe is dit $^{-}2$.*

$a \times {}^{-}b$, $3 \times {}^{-}6$

$3 \times {}^{-}6 = {}^{-}18$,	*$6 \times 3 = 18$ en dis onder vriespunt.*
$3 \times {}^{-}6 = 12$,	*$3 \times 6 = 18$ en $18 - 6 = 12$.*
$3 \times {}^{-}6 = 0$,	*$^{-}6 = 0$ en $3 \times 0 = 0$.*
$3 \times {}^{-}6 = 12$,	*$^{-}6 \times 3$: ons moet 3 keer 6 bytel en een keer maak ´n hele.*
$3 \times {}^{-}6 = 0$,	*$3 \times 2 = 6$, $6 - 6 = 0$.*
$3 \times {}^{-}6 = 18$,	*Ek het gewoonweg gemaal.*
$5 \times {}^{-}4 = 16$,	*Kry eers vir $^{-}4$ op die vlak van 5. Dan word dit $^{-}4 \times 4 = 16$.*

$^{-}a \times b$, $^{-}6 \times 3$

$^{-}6 \times 3 = {}^{-}18$,	*$6 \times 3 = 18$ en dis onder vriespunt.*
$^{-}6 \times 3 = 12$,	*$6 \times 3 = 18$, $18 - 6 = 12$.*
$^{-}6 \times 3 = 0$,	*$6 = 0$.*
$^{-}6 \times 3 = 0$,	*$3 \times 2 = 6$, $6 - 6 = 0$.*
$^{-}6 \times 3 = 0$,	*Jy moet 2 keer 3 optel om $^{-}6$ ´n hele te kry.*
$^{-}6 \times 3 = 18$,	*Ek het gewoonweg gemaal.*

$^-4 \times 5 = 20$, *Dit moet opstyg as die minusgetal eerste staan.*

$a + {}^-b$, $a > b$, $12 + {}^-7$

$8 + {}^-5 = 3$, *dis 8 grade plus die minus 5 wat jy aftrek*

$12 + {}^-7 = {}^-19$, *12 + 7 = 19 en dis ⁻7.*

$12 + {}^-7 = {}^-5$, *12 bokant 0, tel 7 af.*

$8 + {}^-5 = 8$, *8 + 5 = 13, 13 - 5 = 8.*

$12 + {}^-7 = 5$, *12 - 7 = 5.*

$12 + {}^-7 = 19$, *12 + 7 = 19.*

$12 + {}^-7 = 9$, *jy het 3 nodig om van ⁻7 ´n hele te maak en 12 - 3 = 9.*

$8 + {}^-5 = 8$, *8 + 0 = 8, want +5 ⁻5 = 0.*

$a + {}^-b$, $b > a$, $5 + {}^-11$

$5 + {}^-11 = {}^-6$, *ek koop 11 by 5 om by nul te kom, dan is minus 5 minus 6.*

$5 + {}^-11 = {}^-6$, *ek het ⁻11, tel 3 by.*

$3 + {}^-5 = {}^-2$, *dit was ⁻5 grade, toe word hy 3 grade warmer.*

$3 + {}^-5 = {}^-2$, *jy tel 3 by ⁻5. Jy trek dit af en kry ⁻2.*

$3 + {}^-5 = 0,2$, *jy kan nie die grote van die kleintjie aftrek nie, dis ´n getal wat nie ´n heelgetal is nie.*

$5 + {}^-11 = 6$, *dit moet 6 grade bo vriespunt wees, want dit word warmer.*

$3 + {}^{-}5 = 2$,	*vat 5 en minus 3 daarvan.*
$5 + {}^{-}11 = 0$,	*$^{-}11 = 0$.*
$3 + {}^{-}5 = 2{,}5$	*$^{-}5$ is nie 'n heelgetal nie* (Beskou $^{-}5$ = 0,5).
$5 + {}^{-}11 = {}^{-}16$:	*Het $^{-}11$ en tel 5 by, dis dan $^{-}16$.*

$^{-}a \times {}^{-}b$, $^{-}4 \times {}^{-}5$

$^{-}4 \times {}^{-}5 = 20$,	*ek hoef nie af te trek nie, want dis altwee onder vriespunt.*
$^{-}4 \times {}^{-}5 = 20$,	*ek het net die minusteken weggelaat.*
$^{-}4 \times {}^{-}5 = {}^{-}20$,	*4 x 5 = 20 en dis minusgetalle.*
$^{-}4 \times {}^{-}5 = 11$,	*4 x 5 = 20, 20 - 4 - 5 = 11.*
$^{-}4 \times {}^{-}5 = {}^{-}1$,	*5 - 4 = 1, daarom 4 - 5 = $^{-}1$.*

$^{-}a - {}^{-}b$, $a > b$, $^{-}5 - {}^{-}2$

$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$,	*want 5 - 2 = 3.*
$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$,	*dis 5 grade onder vriespunt en as jy nog 2 grade ondertoe tel is dit $^{-}3$.*
$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}7$	*dis $^{-}5$ grade, word toe kouer met $^{-}2$ grade, toe is dit $^{-}7$ grade.*
$^{-}8 - {}^{-}3 = {}^{-}5$,	*$^{-}8$ is eintlik niks en $^{-}3$ is eintlik niks en as jy hulle minusse wegvat, is 8 - 5 = 3.*
$^{-}5 - -2 = {}^{-}7$,	*ek het $^{-}5$ gevat en $^{-}2$ afgetrek.*
$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$,	*ek het $^{-}5$ gevat en $^{-}2$ afgetrek.*
$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$,	*ek het opbeweeg, want 12 - 4 = 8 en 12 - 4 = 16.*

$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$, *$5 - 2 = 3$, $3 - 5 = {}^{-}2$.*

$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}16$, *trek 12 van vriespunt af en ook 4.*

$^{-}5 - {}^{-}2 = 12$, *$-5 - 5 - 2$.*

$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$, *$^{-}4 + {}^{-}8 = {}^{-}12$.*

$^{-}8 - {}^{-}3 = 5$, *trek 8 van niks af, dis 8, 8 minus niks is 8, en $8 - 3 = 5$.*

$^{-}5 - {}^{-}3 = 5$, *onmoontlik, want $5 - 5 = 0$, $0 - 2 =$ onmoontlik.*

$^{-}a - b$, $a > b$, $^{-}8 - 3$

$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$, *$^{-}8$ trek af $^{-}3$ is $^{-}5$.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$, *3 minder as 8 is 5, dus $^{-}5$.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$, *jy het $^{-}8$ grade, tel 3 grade af.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}11$, *tel 8 en 3 op, skryf dan $^{-}11$.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}3$, *$8 - 3 = 5$, $5 - 8 = {}^{-}3$.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}11$, *$0 - 8 - 3$.*

$^{-}8 - 3 = 11$, *$8 + 3 = 11$.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}11$, *$^{-}11 + 3 = {}^{-}8$.*

$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$, *$8 - 3 = 5$, maar dis $^{-}8$ en $^{-}3$.*

$^{-}a - {}^{-}b$, $b > a$, $^{-}5 - {}^{-}8$

$^{-}5 - {}^{-}8 =$ *kan nie, want $^{-}8 > {}^{-}5$ of $8 > 5$.*

$^{-}5 - {}^{-}8 = 3$, *$8 + 5 = 13$ en $5 - 8 = {}^{-}3$ d.w.s. $^{-}5 - {}^{-}8 = 3$.*

$^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$, *$^{-}8$ grade onder, as jy $^{-}5$ aftrek, is dit $^{-}3$*

$^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}13$, *dit is $^{-}5$ grade. Dit word kouer met $^{-}8$ grade, dan is dit $^{-}13$ grade.*

$^{-}5 - {}^{-}8 = -\,{}^{-}3$, *$5 - 8 = {}^{-}3$ d.w.s. $^{-}5 - {}^{-}8 = -\,{}^{-}3$.*

$^{-}5 - {}^{-}8 = 3$, *$5 - 8 = {}^{-}3$, $^{-}5 - {}^{-}8 = 3$ grade bo vriespunt*

$^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}13$, *$0 - 5 - 8$.*

$^{-}5 - {}^{-}8 = 3$, *jy het $^{-}5$, dan kan jy nie $^{-}8$ daarvan aftrek nie, dan word dit $+3$.*

$^{-}5 - {}^{-}8 = +3$; *$^{-}5 + 8$. Jy tel boontoe. Ek kan nie sien hoe ek ondertoe kan werk nie, want $5 < 8$.*

$^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}13$; *$^{-}5$ trek af $^{-}8$.*

7 − 7

$7 - 7 = 0$; *7 minus dieselfde getal is nul.*

$7 - 7 = 0$; *7 bokant, trek 7 af.*

$7 - 7 = 1$; *jy het 7 en trek sewe af.*

$7 - 7 = 0$; *jy het 7 potlode en jy neem sewe weg, dan het jy 0 potlode*

7 + ⁻7

$7 + {}^{-}7 = {}^{-}14$, *as jy 7 het en jy sit 7 by, dan's dit 14 en dis minus.*

$7 + {}^{-}7 = 0$, *dis 7 grade en dit word warmer met 7 grade, dan's dit 0.*

$7 + {}^{-}7$, *$7 + 7 = 14$; $14 - 7 = 7$.*

$7 + {}^{-}7 = 0$, *jy het $^{-}7$, tel 7 by, dan's dit 0* grade .

$7 + {}^-7 = 1$,	*ek weet nie hoe om dit op te tel as ek ´n negatiewe getal by tel nie.*
$7 + {}^-7 = 14$,	*7 + 7 = 14.*
$7 + {}^-7 = {}^-7$	*is mos nie eintlik iets nie en ⁻7 is onder nul,dit tel dus nie eintlik nie.*
$7 + {}^-7 = 0$;	*jy het ⁻7 en jy tel ´n getal by wat dieselfde is as die minusgetal, dan´s dit nul.*

$^-7 - {}^-7$

$^-7 - {}^-7 = 0$,	*⁻7 trek af ⁻7 is nul.*
$^-7 - {}^-7 = {}^-0$,	*7 - 7 = 0 en dis ⁻7.*
$^-7 - {}^-7 = {}^-14$,	*dis ⁻7 grade en dit word kouer met ⁻7 grade, nou is dit ⁻14 grade.*
$^-7 - {}^-7 = 0$,	*⁻7 trek af ⁻7 wat dit warmer word, dan kry ons 0 grade.*
$^-7 - {}^-7 = {}^-1$,	*dis onder grade.*
$^-7 - {}^-7 = 0$,	*⁻7 is dieselfde as ⁻7.*
$^-7 - {}^-7 = 0$;	*Ek het 7 opgetel na bo.*

$^-4 + {}^-4 + {}^-4$

$^-4 + {}^-4 + {}^-4 = {}^-12$.	(Dit word ritmies gelees met die klem op die minusse).
$^-4 + {}^-4 + {}^-4 = {}^-12$,	*drie keer ⁻4.*
$^-4 + {}^-4 + {}^-4 = 4$,	*⁻4 plus +4 is nul, plus 4 is vier.*
$12 - 4 = 8$,	*⁻4 + ⁻4 + ⁻4 = 8; 4 + 4 + 4 = 12.*
$^-4 + {}^-4 + {}^-4 = {}^-12$,	*want 4 + 4 + 4 = 12.*

$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = 0$, *4 + 4 + 4 = 12; 12 - 4 = 8;*

8 - 4 =4; 4 - 4 = 0.

$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = {}^{-}4$, *$^{-}4$ + $^{-}4$ = 0 en trek weer 4 af.*

5.5.3 <u>Tendense wat na vore kom uit die rekenstrategieë van die st.5-leerlinge</u>.

Die eerste paar tendense kom ook net so by die st.6-leerlinge voor en is reeds breedvoerig in hoofstuk 4 bespreek.

Frekwensietabelle en 'n volledige bespreking van reken- en denkstrategieë van die laerskoolleerlinge wat lei tot korrekte of verkeerde antwoorde volg in hoofstuk 6.

i) <u>Analogie met positiewe getalle:</u>

Dit word veral toegepas by $^{-}a + {}^{-}b$, bv. $^{-}5 + {}^{-}3$ en $^{-}a - {}^{-}b$, bv. $^{-}5 - {}^{-}2$

ii) <u>Optelling is die inverse bewerking van aftrekking, of -a is die optellingsinverse van a</u>.

Hierdie leerlinge doen dan $7 + {}^{-}7$ en $^{-}7 - {}^{-}7$ korrek. Andriesa redeneer weliswaar: $12 + {}^{-}7 = 9$: *Jy het 3 nodig om van $^{-}7$ 'n hele te maak en 12 - 3 = 9.*
Sy werk verkeerdelik met +7 - 7 = 10, maar die idee is daar.

'n Ander fout is $^-5 + 5 = 5$; bv. $^-5 + {}^-3$: *$^-5 + 5 = 5$; $5 - 3 = 2$.*

iii) <u>0 as spieëlpunt:</u>

$a + {}^-a$, bv. $5 + {}^-5 = 0$

$5 - {}^-8 = {}^-3$: *$5 - 5 = 0$ en daar bly 3 oor.*

Die idee hieragter is: 0 is die spieëlpunt, maar hy sien nie raak as jy 5 by minus 8 wegneem, jy 13 het nie. Laurette se toepassing (soos in die Proloog weergegee) verduidelik hierdie strategie die beste.

Daar is leerlinge wat die spieëlpunt as $^+1$ beskou, dan is hul antwoorde een te veel vir $^-a - {}^-b$ en $^-a + {}^-b$. Elanie val terug na 1 en later 10, hoewel sy tog aanvanklik intuïtief met 0 gewerk het.

iv) <u>Werk vanaf die kleinste getal</u>

Dit word deur die st.5-leerlinge net so toegepas soos uiteengesit in 4.4 (d).

v) <u>Die toetsmetode:</u>

In hierdie geval verander die leerlinge die gegewe bewerking om die antwoord te bepaal deur die metode wat hulle geleer het om 'n aftreksom se antwoord te toets, byvoorbeeld: $^-8 - 3 = {}^-11$;

$^-11 + 3 = {}^-8$.

Baie leerlinge kry deur middel van hierdie metode ´n verkeerde antwoord deur te sê: *$^{-}11 + {}^{-}3$*, dit wil sê hulle beskou die bewerkingsteken, minus, as die teken van die getal. Daarom sê hulle dan: *$^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8$, daarom $^{-}8 - 3 = {}^{-}5$.*

Elanie korrigeer haarself in die toepassing van die toetsmetode. Sy sê aanvanklik : *$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$, want $^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8$.* Sy besef haar fout toe sy verduidelik en sê: *$^{-}8 - 3 = {}^{-}11$, want $-11 + 3 = -8$.*

vi) <u>Die vertikale getallelyn</u>

Heelwat leerlinge gebruik by B1 grade celsius, byvoorbeeld hulle sê by 5 - 8: *Jy het 5 grade en dit word 8 grade kouer.* Die gebrekkigheid van die termometer, wat nie bewerkingsgevalle $a + {}^{-}b$; $^{-}a + {}^{-}b$, $a - {}^{-}b$, $^{-}a - {}^{-}b$, dus waar ´n negatiewe getal opgetel of afgetrek word, kan akkomodeer nie, word dus weer uitgewys.

vii) Getalle wat dieselfde is, word na mekaar gedoen en die antwoord deur ´n proses van eliminasie verkry: $^{-}5 - {}^{-}8 = 3$ ($8 + 5 = 13$; $5 - 8 = {}^{-}3$ en $^{-}5 - {}^{-}8 = 3$).

viii) <u>Die verskil in grootte tussen die twee getalle word verkry.</u>

Hier word op die vertikale getallelyn getel:

Frans sê: *5 - ⁻8 = 13, want die verskil tussen 5 en ⁻8 is 13.*

Daar is ook ´n paar onverantwoordbare tendense.

ix) <u>Alle tekens word as bewerkingstekens beskou:</u>

As die eerste getal negatief is, beskou hulle dit asof van nul afgetrek en doen dan die res van die bewerking,

$^-5 - {}^-8 = {}^-13$, as $0 - 5 - 8$.

Die bewerking word gedoen asof met positiewe getalle en dan werk hulle weer van agter af vorentoe en trek die getalle met negatiewe tekens af.

$^-5 + {}^-3 = 0$, as $5 + 3 = 8$: $8 - 5 - 3 = 0$.

Net die teken van die eerste getal, of net die teken van die tweede getal word as bewerkingsteken beskou en die ander negatiewe teken word geïgnoreer.

$^-5 + {}^-3 = 3$; $5 + 3 = 8$; $8 - 5 = 3$ of

$^-5 + {}^-3 = 5$; $5 + 3 = 8$; $8 - 3 = 5$.

´n Ekstra getal word ingevoeg om die opeenvolging van die twee tekens uit te skakel.

$^-5 - {}^-2 = {}^-12$ $({}^-5 - 5 - 2)$

x) Daar word 'n blokkie gesoek wat ingevul moet word tussen die bewerkingsteken en die teken van die tweede getal, of dit word geïnterpreteer asof daar niks is om te bereken nie.

Tanya redeneer: *3 x ⁻6 = 0, want 3 x (2) = 6 en 6 - 6 = 0*

Hier gebruik sy dus die tweede getal as antwoord as sy haar denkbeeldige blokkie wil invul.

Vir die res van B1 speel sy 'n hele getalspeletjie en poog in elke geval om haar antwoord 0 te kry en daarvolgens vul sy haar blokkies in.
Byvoorbeeld: ⁻5 + ⁻3 = 0; 8 - 5 = 3 en 3 - 3 = 0.

xi) Die verskil tussen die bewerkings optel en aftrek en die proses van aftrekking wanneer getalle met verskillende tekens opgetel word.

Hiermee hang die tendens saam dat sommige leerlinge 'n baie goeie aanvoeling het ten opsigte van die rigting op die vertikale getallelyn vir sekere bewerkings, byvoorbeeld Lientjie.

Sy tel intuïtief ondertoe by ⁺5 + ⁻11, al toon die bewerkingsteken aan dis optel. Leerlinge raak egter soms verward, byvoorbeeld $^{-}8 - 3 = {^{-}11}$ (8 + 3 = 11 en dit moet kleiner word). Dit is beslis verwarrend dat:

$$^{-}3 + {^{-}5} = {^{-}8}$$

$$^{-}8 - 3 = {^{-}11}$$

Beide is ´n optelproses, maar die bewerkingstekens verskil.

Vir hierdie redenasie is die geval $^{-}a - {^{-}b}$ moeilik, want in die geval waar die bewerkingsteken en die teken van die tweede getal dieselfde is, is daar vir die leerlinge iets wat nie klop nie.

Die verandering in strategie van:

$$^{-}4 + {^{-}4} + {^{-}4} = {^{-}4}$$

na: $^{-}5 + {^{-}3} = {^{-}8}$ is ook herleibaar na bogenoemde verwarring.

xii) <u>Die grootte-orde probleem</u>

Dat $^{-}8 < {^{-}5}$ verwar hulle of hulle is nie daarvoor bevatlik nie, want $/{^{-}8}/>/{^{-}5}/$.

Elanie wat ´n baie goeie insig openbaar, sukkel lank met $5 - {^{-}8}$. Sy skryf op die ou end $^{-}3$ en sê: *Ek het 5 en trek af. Ek moet ´n kleiner getal kry.*

Dit mag wees dat ´n leerling korrek redeneer, maar net omdat grootte-orde ´n probleem is, verander hy sy antwoord na ´n verkeerde een.

xiii) Ignoreer die tekens van die negatiewe getalle en plaas bloot ´n negatiewe getal by jou antwoord. Die probleem is dat dit net so waar kan wees in die gevalle waar hulle analogie met positiewe getalle toepas by $^{-}a + {}^{-}b$ en $^{-}a - {}^{-}b$ byvoorbeeld Elna $^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$ (5 - 2 = 3 en sit ´n minusteken voor).

Hierdie leerlinge onderskei tussen bewerkingstekens en tekens van die getal, maar erken nie die bewerkingsmoontlikhede van negatiewe getalle nie.

xiv) Die minusteken in die antwoord is eintlik ´n aanduider dat die probleem nie gedoen kan word nie.

xv) Sommige leerlinge se onderste bewerkingsgrens is nul en hulle skryf vir $a - b$, $b > a$ bv. $^{-}3 - 8$ en enige ander probleem wat ´n negatiewe teken bevat, dat dit gelyk is aan nul of dis onmoontlik byvoorbeeld Hugo, wat egter ook reken $^{-}a - {}^{-}b$ kan gedoen word, want al die tekens is minus.

xvi) Sommige leerlinge beskou die eerste negatiewe getal as gelyk aan nul. Die tweede negatiewe getal gebruik hulle nie en sal dan sê: *0 - 2 = 0 want jy kan nie 2 van nul aftrek nie.*

xvii) Leerlinge dink ook dat jy ´n positiewe getal kry as jy optel en ´n negatiewe getal as jy aftrek.

xviii Die desimale breuk word gebruik om aan te dui dat die getal is kleiner as nul is.

xix) Onsensitiwiteit vir negatiewe tekens. Hulle ignoreer bloot die negatiewe tekens asof dit nie bestaan nie.

5.5.4 <u>Die volgorde waarin die probleme op Taakkaart B1 gedoen word</u>.

* Geen leerling was heeltemaal konsekwent nie, dit wil sê niemand het die verskillende bewerkings van dieselfde soort almal bymekaar gedoen nie.

* 11 Leerlinge doen die volgorde min of meer dieselfde as waarin dit aangebied is. ´n Gewilde keuse was om nr.1 (5 - 8) en nr.2 ($^-3$ - 8) laaste te doen.

* 2 Leerlinge laat die indruk dat daar geen sisteem in hul keuse is nie.

* 3 Leerlinge doen van nommer 10 af in die gegewe volgorde.

* 1 Leerling doen nommer 1 tot 10 in die gegewe volgorde.

* 5 Leerlinge werk in die gegewe volgorde.

i) Faktore wat die volgorde beïnvloed

* Sommige bewerkings behorende tot dieselfde tipe word misgekyk en dan gaan die leerling aan na ´n volgende bewerkingsgeval.

* Bewerkingsgeval $^{-}a - ^{-}b$, $a > b$, bv. $^{-}12 - ^{-}4$, word na analogie van $a - b$, $a > b$ gedoen en is redelik hoog op in die voorkeurhiërargie.

* Sommige leerlinge doen verskillende bewerkingsgevalle, maar wat dieselfde getalle bevat, na mekaar en bepaal so die ooreenkoms of verskil in antwoord.

(18) $5 - ^{-}8 = 3$, *5 is bokant vriespunt.*

(15) $^{-}5 - ^{-}8 = 3$, *Net soos 18, want ⁻5 is onder vriespunt.*

* Leerlinge vind die volgende bewerkingsgevalle baie moeilik:

$5 - 8$

$5 - ^{-}8$

$^{-}5 - ^{-}8$

In al hierdie gevalle is $b > a$ en die bewerkingsteken is minus. Dat dit *onmoontlik* is, is so diep by hulle ingewortel dat hulle hierdie bewerkingsgevalle telkens oorlaat as die moeilikste.

5.6. Samevatting:

* Die leerlinge toon ´n gretigheid om met negatiewe getalle te werk.

* Hulle het ´n intuïtiewe aanvoeling vir negatiewe getalle, wat hulle soms in die steek laat, maar origens met heel duidelike en logiese verduidelikings voor ´n dag laat kom. Hulle verskaf dus ook dikwels ´n verkeerde rede vir ´n regte antwoord, want in hulle geval sien hulle ten opsigte van negatiewe getalle nog grootliks deur ´n spieël in ´n raaisel. Gunter sê: *$^-5$ - $^-2$ = $^-3$: Dis $^-5$ grade onder vriespunt en jy moet nog 2 ondertoe tel.*

  Hulle kom ook met interessante verduidelikings voor ´n dag, soos by 5 - $^-8$, *Jy moet opgaan?* Hulle kan egter nog nie altyd ´n verklaring vir hulle intuïsies gee nie.

* Hulle formuleer hul verduidelikings beter, alhoewel die 39 leerlinge uit Skool A ´n gebrekkige woordeskat het om hul denkprosesse te verduidelik. Die onderhoudvoerder moet hier dus ook soms tussen die lyne lees en interpreteer.

* Hulle spring ook rond van strategie na strategie, veral die eerste 39 leerlinge, maar nie op so ´n verwarrende wyse as die st.6-leerlinge nie.

* Daar is leerlinge wat self denkhulpmiddels invoer. Charl gebruik die voorbeeld wat reeds genoem is, die oppervlak van die water. Danie weer, gebruik by Taakkaart A temperature en by Taakkaart B1 die *skuld-idee*. Hy vaar heeltemal goed met hierdie idee.

* Die meeste leerlinge vind die bewerkingsgeval $^-a - ^-b$ waar $^-a > ^-b$ redelik maklik en dit word hoog in die voorkeurhiërargie geplaas.

Hennie wat na die onderhoude oorgeplaas is na die spesiale klas, ignoreer aanvanklik alle negatiewe tekens van getalle. By $^-a - ^-b$ egter, ignoreer hy die tweede getal en beskou die teken van die eerste getal as ´n bewerkingsteken. Wanneer hy hierdie bewerking doen, daal hy tot onder sy aanvanklike bewerkingsgrens, naamlik 0.

$$^-12 - ^-4: \quad 12 - 4 = 8 \text{ en } 8 - 12 = ^-4.$$

* Sommige leerlinge erken nie die tekens van getalle nie en beskou alle tekens as bewerkingstekens. By sommige leerlinge bestaan daar verwarring oor die bewerkingsteken en die getal se teken. Karel vra na voorbeeld (11) $^-5 + ^-3 = ^-8$ by voorbeeld (2) $^-8 - 3$: *Is die minusteken voor die 3 aftrek of is dit ook soos (11)?* By voorbeeld (4) $7 + ^-7 = 7$, vra hy waarvoor die minusteken daar is.

Japie is baie sterk ingestel op die bewerkingsteken wat verandering in temperatuur vir hom impliseer, maar staan onaangeraak of die grade wat dit warmer of kouer laat word, positief of negatief is.

Om dit te kan begryp, verg ´n hoër vlak van abstrakte denke, want om minus grade kouer of warmer te laat word, is inderdaad abstrak.

* Die gevalle waar die getalle se tekens verskil, vind die leerlinge baie moeilik.

By 5 - ⁻8 het slegs 4,2% dit korrek.

By ⁻8 - 3 slegs 18,8%.

Die gevalle 5 - 8

5 - ⁻8

⁻5 - ⁻8 vind hulle moeilik en doen hulle gereeld laaste.

Hierdie voorbeelde verteenwoordig gevalle waar ´n groter getal van ´n kleintjie afgetrek moet word.

Daar ontbreek ´n geval waar ´n negatiewe getal afgetrek word van ´n positiewe een met groter absolute waarde, bv. 12 - ⁻8. So ´n geval sou dalk meer lig werp op hul strategieë met - ⁻ en of hulle weer analogie met positiewe getalle gebruik.

* 12 + ⁻7 lewer ´n paar rekenfoute op.

⁻12 - 4 vind hulle weer maklik.

* Die rigting van die bewerkings is vir hulle moeilik as die tweede getal ´n negatiewe getal is. So vele sê by $5 - {}^-8$:
5 trek af 8, sonder om te besef dis ´n negatiewe getal wat afgetrek word en dit sal die rigting van die bewerking verander.

* Leerlinge, veral die 58 van Skool B, ontwikkel heel herkenbare metodes:
Sommige soos Mark, besef dat daar ´n proses van aftrekking plaasvind as getalle met verskillende tekens bymekaargetel word.
Charl gebruik die wateroppervlak.
Danie gebruik die skuld-idee.

Daar is dus tekens van leerlinginisiatief om hul eie intuïsies te ontgin.

* Leerlinge skryf soms: ${}^-5 - {}^-8 = - -3$ want $5 - 8 = 3$. Hierdie leerlinge begryp die wese van die analogie-argument en dit kan as vertrekpunt in die onderrig gebruik word.

* Leerlinge wat aan die "klok-hoor-lui-" effek ly, is ´n uitstekende voorbeeld van hoe kinders hulle blindstaar teen reëls en dan hoegenaamd nie hulle eie logiese vermoëns kan benut nie.

Charl, byvoorbeeld, het die reëls vir vermenigvuldiging en deel met optel en aftrek verwar en dus al die bewerkings verkeerd gedoen.

5.7. Slot

Dit is duidelik uit die resultate van hierdie ondersoek dat daar "*soveel hoofde, soveel sinne*" is.

Die ideaal sou wees dat enige onderrig direk moet aansluit by die bestaande intuïsies van elke individuele leerling. Dit is prakties onuitvoerbaar in die huidige skolestelsel en sou waarskynlik onmoontlik wees in enige skoolstelsel aangesien dit neerkom op een-tot-een onderwys.

Hierdie resultate gee egter baie sterk aanleiding tot die volgende voorstelle, wat wel in ´n groot mate prakties onuitvoerbaar is (en alreeds met groot sukses in die praktyk uitgetoets is (Malan, in die pers)):

* vind uit watter bestaande intuïsies leerlinge het oor ´n bepaalde faset van die sillabus voordat ´n aanvang daarmee geneem word.

* probeer so ver as moontlik aansluit by wat reeds in die kindergemoedere vaardig is.

* moenie ´n *resep* of denkhulpmiddel afdwing op kinders nie.

* gebruik die logika wat inherent in die leerstof is.

HOOFSTUK 6

DENKSTRATEGIEË VAN DIE 97 LAERSKOOLLEERLINGE

6.1. Inleiding:

Hierdie hoofstuk bring ons uiteindelik by die kern van hierdie navorsingsprojek: die denkstrategieë of intuïsies wat laerskoolkinders reeds voor onderrig in verband met heelgetalrekenkunde openbaar.

In hierdie hoofstuk word gepoog om met behulp van tabelle en statistiese gegewens aan die leser voor te hou:

* die mees algemene intuïsies wat 'n korrekte antwoord tot gevolg het.

* die mees algemene intuïsies wat 'n foutiewe antwoord tot gevolg het.

6.2 Resultate (suksespeil) van die 97 laerskoolleerlinge vir taakkaart B1

Hierdie taakkaart het voorbeelde bevat van al die gevalle wat deur die hoërskoolleerlinge in die geskrewe toetse aangepak is.

Die tabel wat hieronder volg, toon nou die suksespeil in persentasievorm, en die rangorde in terme van moeilikheidsgraad van die st.5-leerlinge in vergelyking met die suksespeil in persentasievorm van die st.7-groepe van Kimberley (Hoofstuk 3).

Tabel 9

Geval	Voorbeeld	Suksespeil % St.5 (97)	Rangorde i.t.v. moeilikheidsgraad	Suksespeil % St.7 (514)	Rangorde i.t.v. moeilikheidsgraad.
1	$5 - 8$	51	14	81	7
2	$^{-}8 - 3$	22	3	36	2
3	$7 - 7$	97	21		
4	$7 + {}^{-}7$	42	11		
5	$3 + {}^{-}5$	33	5	80	6
6	$5 + {}^{-}11$	33	6	80	6
7	$8 + {}^{-}5$	37	9	76	5
8	$10 + {}^{-}7$	36	7	76	5
9	$12 + {}^{-}7$	36	8	76	5
10	$^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4$	49	13		
11	$^{-}5 + {}^{-}3$	55	16	82	8
12	$^{-}3 + {}^{-}5$	55	17	82	8
13	$3 \times {}^{-}6$	38	10	90	11
14	$^{-}6 \times 3$	43	12	86	9
15	$5 - {}^{-}8$	4	1	28	1
16	$^{-}5 - {}^{-}2$	52	15		
17	$^{-}8 - {}^{-}3$	55	18		
18	$^{-}5 - {}^{-}8$	20	2	39	3
19	$^{-}7 - {}^{-}7$	73	20		
20	$^{-}12 - {}^{-}4$	55	19	58	4
21	-4×-5	25	4	89	10

Sukses van die 97 laerskoolleerlinge vir Taakkaart B1.

6.2.1. Interpretasie van die gegewens in die tabel:

a) Die moeilikste bewerkings:

Die bewerkingsvoorbeelde 15 (bv. 5 - $^{-}8$); 2 (bv. $^{-}8$ - 3); 18 (bv. $^{-}5$ - $^{-}8$) word intuïtief die moeilikste hanteer deur die st.5-leerlinge. Hierdie gevalle word ook deur die st.7-leerlinge as die drie moeilikste gevalle hanteer, na twee jaar van onderrig.

Dit mag wees dat die feit dat die aftrekker numeries groter as die aftrektal is in bewerkingsvoorbeeld 18, moeilik hanteer word deur die st.5's maar 'n mens sou 'n beter prestasie in bewerkingsvoorbeeld 2 verwag deur die st.7's, want dit is een van die eerste gevalle wat behandel word wanneeer die vier hoofbewerkings met negatiewe getalle onderrig word.

Dit is baie opvallend dat die vierde moeilikste bewerkingsvoorbeelde vir die st.7's bewerkingsvoorbeeld 20, ($^{-}12$ - $^{-}4$) is, terwyl die st.5's daardie spesifieke bewerking die heel maklikste hanteer. (Bewerkings 3 en 19 wat die maklikste deur die st.5's hanteer is, is nie ook deur die st.7's gedoen nie.)

<u>Die geval ^-a - ^-b, bv. $^-12$ - $^-4$</u>

Dit is gepas om op hierdie stadium indringend na hierdie geval, $^-a - {}^-b$; $a > b$ (bewerkingsvoorbeeld 5 vir die skriftelike toetse en bewerkingsvoorbeelde 16, 17, en 20 op taakkaart B1 vir die persoonlike onderhoude) te kyk. Die prestasiepeile vir gevalle 16, 17 en 20 van die 97 laerskoolleerlinge is:

Bewerkingsvoorbeeld 16	:	52%
Bewerkingsvoorbeeld 17	:	55%
Bewerkingsvoorbeeld 20	:	55%

Hier tref ons dus 'n konsekwentheid aan ten opsigte van die hantering van hierdie bewerkingsvoorbeeld. Uit die redes wat verstrek word vir die metode wat gebruik word, blyk dit dat die mees algemene denkstrategie analogie met positiewe getalle is. Verder kan ons dus een van hierdie gevalle neem en as verteenwoordigend van die ander in ons bespreking hanteer.

Hierdie bewerkingsvoorbeeld word maklik intuïtief hanteer deur leerlinge wat nog nooit voorheen onderrig ontvang het in bewerkings met negatiewe heelgetalle nie.

Hieronder volg 'n tabel met die prestasiepeile vir bewerkingsgeval $^-12$ - $^-4$ van al die groepe leerlinge wat by die plaaslike navorsingsprojek oor heelgetalle betrek is.

Tabel 10

% VAN LEERLINGE WAT $^{-}12$ - $^{-}4$ KORREK UITVOER							
Voor onderrig		Na onderrig					
St.5 1985 (97)	St.6 1984 (993)	St.7 1984 (1331)	St.7 1985 (514)	St.8 1984 (266)	St.8 1985 (332)	St.8 1986 (459)	St.9 1986 (307)
55	57	63	58	76	54	67	77

Die 1984-resultate is deur Murray gerapporteer tewyl al die ander in die loop van die huidige ondersoek versamel is.

Die rangorde van moeilikheidsgraad is by al die groepe wat reeds onderrig ontvang het, vierde.

Die st.6-groep van Murray wat die skriftelike toets afgelê het, hanteer dit as die tweede maklikste na die geval $^{-}a + {}^{-}b$; $a > b$, bv. $^{-}7 + {}^{-}5$, terwyl die st.5-leerlinge soos reeds genoem, dit as die maklikste bewerkingsvoorbeeld hanteer.

Die response op hierdie geval ondersteun een van die belangrikste resultate van hierdie projek. Dit verskaf bevestiging dat, met die huidige onderrigstrategieë, sommige intuïsies van leerlinge geweld aangedoen word en dat effektiewe leer ook nie plaasvind wanneer daardie intuïsies vervang word met konkrete denkhulpmiddels (bv. skuld en horisontale getallelyn) nie. Die intuïtiewe denkstrategieë wat hier ter sprake is, is na analogie van bewerkings met positiewe getalle, met ander woorde die leerlinge redeneer:

As $^{+}12 - ^{+}4 = 8$, dan is

$^{-}12 - ^{-}4 = ^{-}8$

b) <u>Die verbatim verduidelikings wat die 97 st.5-leerlinge gegee het vir hul antwoorde op $^{-}12 - ^{-}4$</u>.

i) <u>Korrekte antwoorde</u>:

<u>Analogie met positiewe getalle</u>

* Petrie (13 : 1); Karel (13 : 1); Elzette (13 : 9); Marlana (12 : 11); Marike (13 : 2); Lucas (13 : 1); Nicolette (12 : 9); Ina (13 : 3); Chris (13 : 2); Henry (13 : 2) en Basie (12 : 9) :

want 12 - 4 = 8.

* Theuns (13 : 0); Sakkie (13 : 0); Leonie (12 : 11); en Rusty (13 : 1) :

12 - 4 = 8, maar daar's 'n minus voor elkeen, daarom is die antwoord $^{-}8$.

* Stephan (12 : 7) en Rikki (12 : 4) :

12 - 4 = 8, en dis minusse.

* Rita (12 : 9); Henkie (13 : 3); Adriëtte (13 : 3) en Berlouise (13 : 3) :

<u>Minus</u> 12 trek af <u>minus</u> 4 is <u>minus</u> 8.

* Hentie (14 : 6) :

Altwee is onder vriespunt en 12 - 8 = 4.

* Frans (12 : 10) :

12 - 4 = 8 en $^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$ *is dieselfde.*

* Rudolph (13 : 1) :

Ek het $^{-}12$ *gevat en* $^{-}4$ *afgetrek. Ek het opbeweeg, want 12 - 4 = 8 en 12 + 4 = 16.*

* Ria (12 : 8) :

12 - 4 = 8, maar altwee is onder vriespunt.

* Andri (12 : 5) :

As dit heelgetalle was, was dit 12 - 4.

* Sonet (13 : 0) :

Dis net soos gewone getalle.

* Eurika (13 : 2) en Ernie (13 : 11) :

$^{-}12$ *en* $^{-}4$ *is onder vriespunt.*

* Gwen (12 : 8) :

Dis 'n gewone aftreksom, jy gaan net op. (Hierdie leerling het skynbaar intuïtief aangevoel of geredeneer dat aangesien die bewerkings met heelgetalle wel op die getallelyn aangetoon kan word, die bewegingsrigting geaffekteer word deur die teken van die getal.)

* Ben (13 : 5) :

Dis ´n gewone aftreksom.

* Joanie (13 : 7) :

$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}7$ (Rekenfout!), *want* $12 - 4 = 7$.

Beweging op die vertikale getallelyn (bv. termometer);

* Natalie (12 : 8) en Christian (13 : 2) :

$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$ *grade C. Ek het* $^{-}12$ *grade , dan trek ek* $^{-}4$ *grade af.*

* Gunter (13 : 10); Ryno (12 : 7); Jovan (13 : 0) en Jakkie (12 : 6) :

Dis 12 grade onder vriespunt. Trek nog 4 grade ondertoe af, dan kry jy $^{-}8$.

* Juan (13 : 7) :

$^{-}12$ *het ek en ek trek 4 grade onder af.*

Bewerking met negatiewe getalle:

* Johannes (12 : 2) :

Het 4 van 12 afgetrek. ´Hoekom -8?´

Dis wat oorbly.

* Hannaleen (12 : 5) en Hansie (13 : 11) :

$^{-}12$ trek af 4, dan bly $^{-}8$ oor.

* Mark (13 : 1) :

Jy trek net af.

* Lourie (13 : 3); Frekie (13 : 1); Pietjan (12 : 8) en Christoph (13 : 0) :

Het $^{-}4$ afgetrek van $^{-}12$.

* Jenny (12 : 2) :

$^{-}12$ minus $^{-}4 = {}^{-}8$

* Anèl (13 : 5) :

Ek het net die twee afgetrek.

* Christelle (13 : 4) :

Ek het twee minusgetalle van mekaar afgetrek.

Toetsmetode:

* Elanie (13 : 1) :

$^{-}4 + {}^{-}8 = {}^{-}12$.

Skuld as denkhulpmiddel

* Danie (12 : 11) :

Jy skuld R12 en betaal R4. Nou skuld jy R8.

\# Voorste getal se teken bepaal antwoord se teken:

* Carel (13 : 1) :

$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$

12 - 4 = 8. Sit $^{-}12$ se minus voor 8.

(Hierdie leerling toon egter in die verduidelikings van ander gevalle dat hy wel die negatiewe getalle as bewerkingsgetalle aanvaar. Vermoedelik was sy verduideliking hier net swak geverbaliseer en het hy wel analogie met positiewe getalle gebruik soos in $^{-}5 + {}^{-}3$.)

ii) Foutiewe antwoorde:

\# Die tekens van die getalle word as bewerkingstekens beskou:

$^{-}12 - {}^{-}4 = 4$.

* Donovan (12 : 9) :

Ek vat $^{-}12$, minus minus 4. Toe tel ek dit bymekaar en kry toe $^{-}8$. Toe trek ek dit van 12 af.

* Deon (13 : 2):

Daar is twee minusse by vier. Neem dit as 8 en minus hom met 12.

* Nita (12 : 6) :

  Ek het 12 van 4 afgetrek en toe weer 4 afgetrek.

* Billy (13 : 3) :

  12 - 4 = 8; 8 - 4 = 4.

* Kosie (14 : 6) :

  12 - 4 - 4.

<u>-12 - -4 = 0</u>

* Cornèl (14 : 6) :

  12 - 12 = 0 en 4 - 4 = 0 en 0 - 0 = 0.

* Tanya (12 : 7) :

  20 - 12 = 8; 8 - 4 = 4; 4 - 4 = 0.

* Andrie (12 : 9):

  12 + 4 = 16; 16 - 12 = 4; 4 - 4 = 0.

* Henja (14 : 1) :

  12 - 4 = 8; 8 - 12 = 0.

<u>${}^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}4$</u>

* Hennie (14 : 1):

  12- 4 = 8 en 8 - 12 = ${}^{-}4$.

<u>$^{-}12 - {}^{-}4 = 8$</u>

* Alet (13 : 5) :

Trek 12 van niks af, dis 12. Trek niks van 12 af, dis 12 . Trek 4 van 12 af, dis 8.

<u>$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$</u>

* Andriesa (13 : 2) :

12 - 4 = 8; 8 - 12 = ⁻4; ⁻4 - ⁻4= ⁻8.

<u>Grootte-orde of rigtingprobleem</u>:

<u>$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}16$</u>

* Tish (13 : 2) :

Minus 12, minus nog minus 4, is minus 16.

* Nettie (12 : 10) :

Jy het ⁻12, trek dan nog 4 grade af, dan is dit ⁻16.

* Janie (12 : 9) :

Dis ⁻12, gaan nog 4 laer.

* Japie (14 : 0):

Dis ⁻12 grade en dit word kouer met ⁻4 grade.

* Didi (13 : 1) :

Maak dit ´n optelsom.

* Wennie (13 : 5) :

Trek 12 van vriespunt af en ook 4.

* Marnè (13 : 1) :

$12 - 4 = {}^{-}16$.

* Jan (13 : 2) :

Jy het $^{-}12$ en dan nog $^{-}4$, dit gee $^{-}16$.

* Therese (13 : 2) :

$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}17$ (Rekenfout!)

$^{-}12$ onder, trek nog 4 af.

* Stefaans (13 : 1) en Lianne (13 : 4) :

Jy het $^{-}12$, trek nog 4 af.

* Lynn (13 : 0) :

$^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}16$, want $12 + 4 = 16$ en dis $^{-}12$.

\# Ignoreer die negatiewe tekens van die getalle:

$^{-}12 - {}^{-}4 = 8$, want dis $12 - 4$.

Hierdie antwoord word verskaf deur: Terry (13 : 10); Willie (13 :4); Emsie (12 : 11); Katy (13 : 7); Carla (12 : 9); Annatjie (13 : 10); Liezanne (12 :11) ; Charlotta (12 : 4); Cornè (13 :2) en Susan (13 : 0)

* Marlene (13 : 3) :

Ek het 12 van 4 afgetrek.

* Hugo (13 : 8) :

Dis almal minus, daarom kan jy dit doen.

Die bewerking is onmoontlik:

* Willem (12 : 5):

$^{-}12$ - $^{-}4$ = kan nie, want jy kan $^{-}4$ van 12 aftrek, maar nie - - 4 nie.

* Grietjie (12 : 0) :

Dit kan nie.

* Sanet (12 : 10) :

12 - 12 = 0; 0 - 4 is onmoontlik.

Soek ´n getal om van af te trek:

* Antonie (13 :3) :

$^{-}12$ - $^{-}4$ = 12, want $^{-}12$ is 0; 0 + 12 - 4. (Sy verduideliking is onverstaanbaar.

* Soekie (12 : 9) :

$^{-}12$ - $^{-}4$ = $^{-}8$; dis 12 - 4, want daar is niks om 12 en 4 van af te trek nie.

Sit ´n minus voor die antwoord:

* Susna (13 : 2) :

  ⁻12 - ⁻4 = - - 8, want daar´s ´n minus voor 4 en voor 12.

Verwronge reëls:

* Charl (12 : 9) :

  ⁻12 - ⁻4 = 8, want twee minusse gee ´n plus as antwoord.

* Justin (12 : 5):

  ⁻12 - ⁻4 = ⁻16, want dis 12 + 4: ´n Min maal ´n min gee ´n plus. Sit nou 12 se teken voor 16.

* 54 van die 97 leerlinge het bewerkingsvoorbeeld 20 (⁻12 - ⁻4) korrek gehad. Van hierdie 54 leerlinge kon 30 se redes gekategoriseer word as analogie met positiewe getalle.

Die rekenstrategie om die negatiewe tekens van die getalle te beskou as ´n aanduider van die teken van die antwoord, sou vir ⁻12 - ⁻4 ook ´n korrekte antwoord lewer, naamlik:

12 - 4 = 8 en dus is die antwoord van ⁻12 - ⁻4 = ⁻8, want daar is ´n minusteken voor 12 en vier.

Geen van die 54 leerlinge wat hierdie bewerkingsvoorbeeld korrek gehad het, het hierdie strategie gebruik nie.

Die situasie is dus dat die wins vir hierdie besondere geval, <u>na</u> onderrig, relatief laag is, as dit vergelyk word met die vermenigvuldigingsgevalle waarvoor reëls verskaf word.

Die wins (bereken uit die verskil tussen die prestasiepeile **vóór** en **ná** onderrig) wat gerapporteer is vir die vermenigvuldigingsgevalle is:

Murray	Hugo
st.6 -> st.7 : 52%	st.5 -> st.7 : 64%

Daarteenoor staan die geval $^-a - {}^-b$ (bv. $^-12 - {}^-4$):

Murray	Hugo
st.6 -> st.7 : 6%	st.5 -> st.7 : 3%

Die aanname kan dus gemaak word dat wanneer die intuïsies van leerlinge nie in ag geneem word in die onderrigproses nie, vrugbare teelaarde vir leer verdroog tot 'n bar woestyn van verwarring.

Die enigste manier om dit egter empiries te bewys, is om aan die 97 leerlinge met wie onderhoude in hul st.5-jaar gevoer is, die skriftelike toets te laat aflê in hul st.6

en st.7-jaar en dit dan op te volg met onderhoude om hul denkstrategieë te bepaal.

c) <u>Die maklikste gevalle:</u>

Die st.5-leerlinge hanteer:

bewerkingsvoorbeeld 3	:	$7 - 7$	Suksespeil	:	97%
bewerkingsvoorbeeld 19	:	${}^{-}7 - {}^{-}7$			73%
bewerkingsvoorbeeld 20	:	${}^{-}12 - {}^{-}4$			55%

as die maklikste gevalle.

Die eerste en tweede maklikste bewerkingsvoorbeeld is nie deur die skriftelike toetse gedek nie en oor die derde maklikste bewerkingsvoorbeeld, bewerkingsvoorbeeld 20, is in die voorafgaande paragraaf breedvoerig verslag gedoen.

Die drie maklikste gevalle vir die st.7-leerlinge was die drie vermenigvuldigingsgevalle:

bewerkingsvoorbeeld 13	:	$3 \times {}^{-}6$	Suksespeil	:	90%
bewerkingsvoorbeeld 21	:	${}^{-}4 \times {}^{-}5$			89%
bewerkingsvoorbeeld 14	:	${}^{-}6 \times 3$			86%

Dis dan ook die gevalle waarvoor die leerlinge twee maklike vermenigvuldigingsreëls leer.

Bewerkingsvoorbeeld 14 het ´n suksespeil van 43% by die st.5´s en lê maar 12de in die rangorde in terme van moeilikheidsgraad. Hierdie bewerkingsvoorbeeld word ook maklik na analogie met positiewe heelgetalle hanteer, trouens, van die 42 leerlinge wat die bewerkingsvoorbeeld reggehad het, het 24 analogie met positiewe getalle gebruik, terwyl 13 leerlinge as rede aangevoer het, dat:

6 x 3 = 18 en omdat dit ⁻6 is is dit ⁻18.

Dit is baie moeilik vir die onderhoudvoerdeer om hierdie redes van die kinders korrek te interpreteer, want die rede soos verskaf in die bostaande paragraaf kan net sowel die kind se gebrekkige poging wees om sy intuïtiewe idee van analogie met positiewe heelgetalle onder woorde te bring. Vir bewerkingsvoorbeeld 20 ($^-12$ - $^-4$), waar dieselfde analogie betrokke is, het geen leerling hierdie foutiewe strategie gebruik nie. Daar kan met goeie reg aanvaar word dat vir die bewerkingsvoorbeeld 14 ´n beduidende persentasie van die 13 leerlinge wat hierdie rede aangevoer het, tog wel die regte idee gehad het.

Die ander geval, bewerkingsvoorbeeld 13 (3 x $^-6$) kan moontlik moeiliker analogies geïnterpreteer word en die suksespeil was dan ook 38%. 21 leerlinge het wel analogie gebruik en 13 het die verkeerde denkstrategie, soos hierbo verduidelik, gebruik.

Bewerkingsvoorbeeld 21 ($^-4$ x $^-5$), waar twee negatiewe getalle met mekaar vermenigvuldig word, het ´n suksespeil van 25% gehad. Hierdie geval is baie moeilik logies verantwoordbaar, met behulp van formele logika, soos analogie met positiewe heelgetalle, of denkhulpmiddele (bv. skuld, horisontale getallelyn) of andersins.

Die volgende redes is deur leerlinge in die verband verskaf:

* Analogie met positiewe getalle (7 leerlinge)
  bv. $^{-}4 \times {}^{-}5 = 20$, *want dis meer as* 0 grade , aldus Henkie (13 : 3).

* die negatiewe tekens van getalle word bloot geïgnoreer (leerlinge), dus $^{-}4 \times {}^{-}5$ word $4 \times 5 = 20$, in die woorde van Liezanne (12 : 11 maande): *Dis 4 x 5 en dis 20.* Hierdie leerling het trouens die hele Taakkaart B1 so aangepak.

* die negatiewe teken is ´n aanduiding dat die bewerking eintlik nie uitgevoer kan word nie (4 leerlinge). Hierdie idee spruit voort uit die idee dat *´n groot getal nie van ´n kleintjie afgetrek kan word nie.* Die leerling akkomodeer dan tog die begrip negatiewe getal, maar beskou dit as ´n uitkoms vir hierdie probleme wat *nie gedoen kan word nie.* Wanneer daar dan twee negatiewe getalle is, is dit so goed soos uitkanselleer, daarom: $-4 \times -5 = 20$. Chris (13 : 2).

* die tekens van die getalle word as bewerkingstekens beskou (1 leerling), byvoorbeeld:
$^{-}4 \times {}^{-}5 = 20$, *want daar is niks om 4 van af te trek nie en niks om 5 van af te trek nie; dus is dit 4 x 5 = 20*, aldus Soekie (12 : 9).

* reëls, of verwronge reëls: (4 leerlinge)
$^{-}4 \times {}^{-}5 = 20$, *want as jy ´n min en ´n min het, kry jy ´n plus*, aldus Charl (12 : 9).
Charl pas egter hierdie reël toe vir optel en aftrek ook. Hy het by verdere navraag erken dat sy broer hom so geleer het. Dit is dus ook die "klok-hoor-lui"-effek.

* Vae intuïsie van posisie op die vertikale getallelyn (1 leerling). Lynn (13:0): *4 x 5 = 20, want dit moet bo 0 kom. Dis meer as wat die getalle saam gee.*

* die dubbele minusteken wat ´n uitvloeisel is van die formele logika teenwoordig by die analogiese afleidings (1 leerling), Andriette (13 : 2):
$^{-}4 \times {}^{-}5 = {}^{-}\,{}^{-}20$, *dis anders as* $^{-}20$, *want dis minus 4 en minus 5.*
Sy gebruik presies dieselfde redenasie by die moeilike bewerkingsvoorbeeld 15 (5 − $^{-}8$).

Die ryke geskakeerdheid van die intuïsies van leerlinge kom weer eens sterk na vore en bring ´n mens onder die indruk van die individualiseringsbeginsel in die onderwys.

6.2.2 <u>Die gewilde verkeerde antwoord:</u>

Uit die skriftelike toetse wat die st.7´s en die st.8´s in beide hierdie en Murray se ondersoek afgelê het, het dit geblyk dat in die moeilikste gevalle hoë persentasies leerlinge dieselfde foutiewe antwoord vir ´n geval verstrek het.

Die gevalle wat geraak word, is:

i) $^-a - {}^-b$; $a > b$: $^-12 - {}^-4$

ii) $^-a - {}^-b$; $b > a$: $^-5 - {}^-8$

iii) $^-a - {}^+b$; $a > b$: $^-8 - 3$

iv) $a - {}^-b$; $a > b$: $8 - {}^-5$

Al hierdie gevalle is in die onderhoudsveld se Taakkaart B1 ingesluit. Geval (iv) $a - {}^-b$; $a > b$ $8 - {}^-5$ is egter nie so ingesluit nie, wel:

$a - {}^-b$; $b > a$: $5 - {}^-8$.

Hierdie geval is dus moeiliker as die wat in die skriftelike toetse opgeneem is, veral vir die laerskoolleerlinge vir wie dit moeilik val om *´n groot getal van ´n kleintjie af te trek.*

(Kommentaar oor die insluiting van 'n geval a - $^-$b; a > b volg in Hoofstuk 8).

a) <u>Frekwensietabel vir die gewilde verkeerde antwoord</u>:

Die tabel verskaf eerstens die suksespeil in persentasie van die twee groepe sts.7 en 8-leerlinge en die st.5-leerlinge. (Murray se groepe is st.7_1 en st.8_1. Die groepe in hierdie ondersoek is st.7_2 en st.8_2.)

Daarna volg die persentasie leerlinge in elk van bogenoemde groepe wat die gewilde verkeerde antwoord verskaf het.

* Die gewilde verkeerde antwoord vir (i) bv. $^-12$ - $^-4$ is: $^-12$ - $^-4$ = $^-16$ (vir hoërskoolleerlinge). Vir die leerlinge wat reeds onderrig ontvang het, behels dit dat hulle optel en 'n minus voor die antwoord skryf, want hulle ken die reël: - x - = + of - $^-$ = +

Vir die st.5-leerlinge behels dit dat hulle bogenoemde strategie gebruik of dat hulle 'n probleem het met die rigting op die vertikale getallelyn wanneer 'n negatiewe getal afgetrek word.

* Die gewilde verkeerde antwoord vir geval (ii) bv. $^-5$ - $^-8$ is:

$^-5$ - $^-8$ = $^-13$ (vir hoërskoolleerlinge).

Dit behels presies dieselfde strategieë soos uiteengesit vir (i).

* Die gewilde verkeerde antwoord vir geval(ii) bv. $^{-}8 - 3$ is:

$^{-}8 - 3 = {}^{-}5$ (vir hoër- en laerskoolleerlinge).

Vir beide groepe behels dit ´n strategie dat afgetrek word en ´n minus voor die antwoord geskryf word.

Die gewilde verkeerde antwoord by geval (iv) bv. $8 - {}^{-}5$ (vir hoërskool) en $5 - {}^{-}8$ (vir laerskool) is:

$5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$

en $8 - {}^{-}5 = 3$

Dit behels die strategie dat daar net afgetrek word sonder inagneming van die negatiewe teken van die tweede getal.

<u>Tabel 11</u>

GEVAL	KORREKTE ANTW.					GEWILDE VERKEERDE ANTW.				
	7_1	8_1	7_2	8_2	5	7_1	8_1	7_2	8_2	5
$^{-}a - {}^{-}b$: $^{-}8 - {}^{-}5$	54	75	57	65	54	30	18	26	29	12
$^{-}a - {}^{-}b$: $^{-}5 - {}^{-}8$	43	68	40	57	14	33	20	31	32	11
$^{-}a - b$: $^{-}8 - 3$	42	64	37	46	20	47	32	53	48	51
$a - {}^{-}b$: $5 - {}^{-}8$	28	58	28	39	3	56	35	56	52	50

b) <u>Interpretasie van die tabel</u>:

Vir die gevalle (iii) en (iv) is die persentasie leerlinge wat die gewilde fout gemaak het, meer as 50% vir die st.7-groepe en vir die st.5's.

Vir die geval (iii) is die persentasie st.7_2-leerlinge wat die fout gemaak het ook 2% hoër as die peil van die st.5's.

Dus, na twee jaar onderrig, maak 'n groter, of ongeveer dieselfde persentasie st.7-leerlinge die spesifieke fout as die st.5-leerlinge.

Vir die gevalle (i) en (ii) is daar 'n ander gewilde fout by die st.5-leerlinge omdat hulle nog geen bewerkingsreëls vir negatiewe getalle ken nie. Dit is:

Geval (i): ${}^{-}a - {}^{-}b$; $a > b$, bv. ${}^{-}12 - {}^{-}4 = 8$

17.5% van die leerlinge maak hierdie fout. Dit behels die strategie dat hulle die negatiewe tekens van die getalle ignoreer.

Geval (ii): ${}^{-}a - {}^{-}b$; $b > a$, bv. ${}^{-}5 - {}^{-}8 = 3$.

28,9% van die leerlinge maak hierdie fout. Dit behels bloot dat hulle nie die $- \, {}^{-}$ kan hanteer nie, of dat hulle aftrek as kommutatief beskou.

c) Gevolgtrekking:

Die bespreking het uitgewys dat daar ´n noue korrelasie tussen die gewilde foute van die st.7´s en st. 5´s bestaan vir die moeilike gevalle.

Dit beklemtoon dat daar vir hierdie moeilike gevalle nie effektiewe leer plaasgevind het in twee jare van onderrig nie. Leerlinge wat net op hul intuïsies staatmaak, vaar net so goed.

6.3 Denkstrategieë deur die leerlinge gebruik

6.3.1 Inleiding

Toe daar aanvanklik noukeurig deur die getranskribeerde onderhoude gewerk is, is daar 101 verskillende "metodes" of kombinasies van "metodes" geïsoleer en daarvolgens is elke antwoord van elke kind gekategoriseer.

Hieronder volg nou ´n verwerkte weergawe van daardie 101 strategieë. Hulle word rangskik onder subhoofde.

Eerstens word die tipiese strategieë wat ´n korrekte redenasie verteenwoordig en ´n korrekte antwoord ten gevolg het, verskaf.

Daarna volg dan die tipiese verkeerde denkstrategieë wat tot ´n verkeerde antwoord sou lei, maar ook soms tot ´n regte antwoord sou kon lei, bv. :
Kategorie 15 verteenwoordig die volgende denkstrategie:
Die leerling werk met die bewerkingsteken en ignoreer die negatiewe tekens van die getalle, maar as daar een of twee negatiewe tekens voorkom, word die antwoord negatief.

Dit sou tot ´n verkeerde antwoord lei vir bewerkingsvoorbeeld 8 : 10 + $^{-}7$:

$$10 + {}^{-}7 = {}^{-}17$$

Vir bewerkingsvoorbeeld 12 : $^{-}3$ + $^{-}5$ sou die toepassing van die strategie onder bespreking tot ´n korrekte antwoord lei,

$$^{-}3 + {}^{-}5 = {}^{-}8.$$

6.3.2 Korrekte strategieë vir die bewerkings met heelgetalle

a) Die vertikale getallelyn

* die vertikale getallelyn met spesifieke verwysing na die termometer of grade of vriespunt ensovoorts (nommer 2).

  Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 11: $^{-}5$ + $^{-}3$ = $^{-}8$

  Hansie (13 : 11) : *5 grade + 3 grade = 8 grade, daarom $^{-}8$ grade want dis onder vriespunt.*

* die vertikale getallelyn, sonder spesifieke verwysing na bogenoemde (kategorie 3)

  Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 4: $7 + {}^{-}7 = 0$

  Lucas (13 : 1 maand) : *$^{-}7$ is 7 onder nul, plus 7 gee 0.*

* die vertikale getallelyn, maar die leerling begin by die kleinste getal reken as hulle optel (kategorie 4),

  Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 4: $7 + {}^{-}7 = 0$

  Chris (13 : 2) : *Ek het $^{-}7$ en tel dan 7 op, dan kom ek by 0.*

* oënskynlik die vertikale getallelyn maar die leerling werk tot by nul en dan verder (kategorie 34).

  Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 8: $10 + {}^{-}7 = 3$

  Lucas (13 : 1) : *$^{-}7 + 10$ is $^{-}7 + 7 = 0$, en dan bly daar 3 oor.*

* soos kategorie 34, maar die leerling gee ´n aanduiding dat hy verstaan dat die som van positiewe en negatiewe getalle se berekening ´n aftrekproses is (kategorie 88).

  Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 5: $3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$

  Gunter (13 : 10) : *$5 - 3 = 2$, maar jy het* *plus drie en minus vyf, dan moet jy vyf ondertoe gaan. Daar bly twee minusse oor.*

* die leerling beskou + - as - en gebruik dan die vertikale getallelyn. (kategorie 42)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 8: $10 + {}^{-}7 = 3$

Donovan (12 : 9) : *10 trek af 7 gee drie, want jy beweeg af.*

* die leerling vra om die termometervel, Taakkaart C2, te gebruik terwyl B1 gedoen word. (kategorie 2)

5 van die 97 leerlinge het daarvoor gevra.

b) <u>Analogie met positiewe getalle</u>

* die leerling redeneer as $3 + 5 = 8$, dan moet ${}^{-}3 + {}^{-}5 = {}^{-}8$ (kategorie 6.)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 20: ${}^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$

Sakkie (13 : 0) : *12 - 4 = 8, daarom sal ${}^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}8$, want dis 'n gewone aftreksom.*

* die leerling artikuleer nie die analogie so duidelik nie, maar plaas definitiewe klem op die minustekens van die getalle. Dit kom veral voor by bewerkingsvoorbeeld 19 (${}^{-}7 - {}^{-}7$) waar aftrekker en aftrektal gelyk is (kategorie 14).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 19: $^-7 - {}^-7 = {}^-0$

Sakkie sê ook: *Minus 7 trek af minus 7 =* $^-0$.

* die leerling kry 'n dubbele minusteken as antwoord in gevalle waar die aftrekker groter as die aftrektal is, bewerkingsvoorbeeld 18 $^-5 - {}^-8$ (kategorie 33) of by die vermenigvuldiging van twee negatiewe getalle, bewerkingsvoorbeeld 21: $^-4 \times {}^-5$.

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 18: $^-5 - {}^-8 = - {}^-3$

Andriëtte (13 : 5) sê: $5 - 8 = {}^-3$, daarom $^-5 - {}^-8 = - {}^-3$.

c) Aftrek geskoei op: *omdat ek a het, kan ek a weggee.* (kategorie 1).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 3: $7 - 7 = 0$

Hansie (13 : 11) sê: *As jy 7 albasters het en jy neem 7 albasters weg, het jy niks.*

d) Toetsmetode: (kategorie 27)

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 6: $5 + {}^-11 = {}^-6$

Henkie (13 : 3) sê: *By 5 moet ek* $^-6$ *tel om 11 te kry.* Hierdie is 'n foutiewe artikulasie, want die kanse dat hy met 'n foutiewe idee by die regte antwoord uitkom, is gering.

e) <u>Patrone</u>: (Kategorie 49)

* Die leerlinge gebruik dieselfde getalle met verskillende tekens en bewerkingstekens om 'n antwoord af te lei.
<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 18: $^-5 - {}^-8 = 3$.
Frans (12 : 10) sê: *8 + 5 = 13, 5 - 8 = $^-3$, en daarom is $^-5 - {}^-8 = 3$*

* 'n Kombinasie tussen (d) kategorie 27 en (e) (kategorie 49) of kategorie 86. Die leerling gebruik dus die toetsmetode gekombineerd met patrone.
<u>Voorbeeld:</u> Bewerkingsvoorbeeld 1: $5 - 8 = {}^-3$.
Frans (12 : 10) sê: *Ek moet -3 by 8 tel om $^-5$ te kry.*

f) <u>Die verskil tussen die grootte van twee getalle:</u>

* Die leerlinge werk op 'n vertikale getallelyn of andersins om die aantal plekke tussen die gegewe twee getalle te bepaal (kategorie 21).
<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 15: $5 - {}^-8 = 13$
Frans (12 : 10) sê: *5 + 8 = 13. Die verskil tussen 5 en $^-8$ is 13.*

g) <u>Die leerlinge verstaan en implementeer die verskil tussen die bewerking aftrek en die proses van aftrekking wanneer 'n negatiewe en positiewe getal opgetel word</u>. (kategorie 36)

<u>Voorbeeld:</u> Bewerkingsvoorbeeld 12: $10 + {}^{-}7 = 3$. Johannes (12 : 2) sê: *10 plus ⁻7 is 3. Jy trek dit af.*

h) <u>Denkhulpmiddels</u>: (Skuld, temperature) (kategorie 25).

Een leerling, Danie (12 : 11), gebruik by Taakkaart A:

(1) $8 - 5 =$

(2) $12 - 7 =$

(3) $4 + 5 =$

(4) $4 - 9 =$

vir kategorie (4) $4 - 9 = {}^{-}5$, spontaan temperature om hierdie antwoord van hom te verduidelik: *Sê nou dis 4 grade C en dit word 9 grade C kouer, dan is dit ⁻5 grade C.*

By Taakkaart B1 slaan hy onmiddellik oor na die <u>skuld-idee</u> en verduidelik al 20 bewerkingsvoorbeelde aan die hand daarvan.

Hier volg nou ´n bespreking van sy gebruik van hierdie denkhulpmiddel by die drie moeilikste gevalle, 2, 18, 15.

<u>Voorbeeld:</u> Bewerkingsvoorbeeld 2: $^{-}8 - 3 = {}^{-}11$ (Hierdie korrekte antwoord verander hy na $^{-}5$ as hy met sy verduideliking begin en sê dan: *Jy skuld R8. Trek dan 3 daarvan af; dit beteken jy betaal R3. Dan bly daar R5 skuld oor.*

<u>Bewerkingsvoorbeeld 18:</u> $^{-}5 - {}^{-}8 = +3$. Danie sê: *Jy skuld R5 en betaal R8, dan het jy nog R3.*

Dus; hy het weer herstel en sy aanvanklike korrekte aanvoeling gehandhaaf. Dit is noemenswaardig dat hierdie leerling spontaan $- {}^{-}8$ interpeteer as betaal R8.

<u>Bewerkingsvoorbeeld 15</u>: $5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$. Danie sê: *Jy het R5 skuld en betaal R8, dan het jy drie rand skuld.*

In die lig van bogenoemde lyk dit asof hy hier bloot ´n nalatige interpretasiefout gemaak het.

<u>Bewerkingsvoorbeeld 21</u>: $^{-}4 \times {}^{-}5$ wat op Taakkaart D voorkom, hanteer hy as volg:

(1) $5 \times {}^{-}4 = {}^{-}20$ (*5 keer R4 skuld*)

(2) $^{-}4 \times 5 = {}^{-}20$ (Net so)

(3) $^{-}4 \times -5 = {}^{-}20$ (Net so)

Verdere invraery lei hom nie om die verskil in te sien of sy metode verder te verduidelik nie.

Freudenthal (1973: 255) se aanname dat 'n mens die konsep moet verstaan om die denkhulpmiddel effektief te kan gebruik, word hierdeur geïllustreer.

i) Die negatiewe bewerkingsteken en die negatiewe teken van die volgende getal word as 'n plus beskou (- x - = +) (kategorie 60).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 20: $^{-}12 - {^{-}4} = {^{-}8}$.
Gwen (12 : 8) sê: *Dis 'n gewone aftreksom, jy gaan net op.* By bewerkingsvoorbeeld 18: $^{-}5 - {^{-}8} = 3$, sê sy: *Dis $^{-}5 + 8$. Ek werk boontoe. Ek kan nie sien hoe ek ondertoe kan werk nie. 5 is mos kleiner as 8.*
Gwen se hele onderhoud is 'n goeie voorbeeld van leerlinge met sterk, korrekte intuïsies, maar 'n verbale onvermoë om wat sy aanvoel in wiskundig korrekte taal om te sit.

j) 'n Variasie, dat die leerling (i) toepas en dan ook die vertikale getallelyn gebruik. (Kategorie 91).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 18: $^{-}5 - {^{-}8} = 3$
Mark (13 : 1) sê: *Jy het $^{-}5$, trek dit af van 8, dan bly daar 3 oor, want jy gaan onder toe.*

k) <u>Die positiewe bewerkingsteken en die negatiewe teken van die volgende getal word as ´n minus beskou of omgekeerd: (- x + = - of + x - = -)</u> (Kategorie 42.)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 11: $^-5 + {}^-3 = {}^-8$

Gwen sê: *Ek het ondertoe gewerk. Dis nog ´n $^-3$.* Of bewerkingsvoorbeeld 5: $3 + {}^-5 = {}^-2$. *Dit beteken ek moet 5 van 3 aftrek.*

Daar is ook twee variasies hierop:

* By bogenoemde (i) gebruik die leerling die toetsmetode (kategorie 76)

  <u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 9: $12 + {}^-7 = 5$.

  Henkie (13 : 3) sê: *Ek het 12 gevat. Ek kort nog 5 by 7 om 12 te maak.*

* By (j) gebruik die leerling die vertikale getallelyn, maar werk eers tot by nul en dan verder. (kategorie 99)

  <u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 6: $5 + {}^-11 = {}^-6$

  Ben (13 : 5) sê: *Dis 5 - 11. Vat 5 by 11, dan bly 6 oor en dis $^-6$.*

6.3.3 <u>Foutiewe strategieë vir bewerkings met heelgetalle</u>

Sommige van hierdie strategtieë gee aanleiding tot ´n korrekte antwoord, soos byvoorbeeld $^-5 + {}^-3 = {}^-8$, sou korrek wees as die leerling slegs die negatiewe tekens van die getalle 5 en 3 as ´n aanduider van die teken van die antwoord beskou, maar die idee in hierdie paragraaf is om die foutiewe strategieë te groepeer sodat ´n aanduiding verkry kan word van watter wanopvattings in die gedagtes van die leerlinge leef.

a) Die negatiewe tekens van die getalle is slegs aanduiders van die teken van die antwoord (Kategorie 15)

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 2: $^-8 - 3 = {}^-5$

Theuns (13 : 0) sê: *Ek het 3 van 8 afgetrek en die dingetjie voor die ag, voor die vyf gesit.*

Daar is ook variasies op hierdie strategie:

* die leerlinge ignoreer die negatiewe tekens, maar doen die bewerking omdat al die tekens van die getalle, asook die bewerkingsteken, negatief is. (Slegs een leerling pas dit toe (kategorie 10)),

  Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 16: $^-5 - {}^-2 = 3$

  Hugo (13 : 8) sê: *Almal is minus, daarom kan jy hom doen.* Vir al die ander gevalle wat nie hieraan voldoen nie, het hy gesê dat die bewerking nie gedoen kan word nie, want daar is ´n *minusteken*. Hierdie leerling het by taakkaart A gesê:

  $$4 - 9 = 5$$

  en $4 - 9 = 9 - 4$

Hy kon ook glad nie die verskuiwings op die termometer regkry nie, alhoewel die onderhoudvoerder hom daartoe probeer lei het.

Hierdie kind is tog besonder gereed om aftrek en optel van negatiewe getalle na analogie met positiewe getalle te leer, want as beide getalle negatief is, aanvaar hy dit as ʼn uitvoerbare bewerking. Hierdie leerling is net ʼn stappie agter Cornè wat bewerkingsvoorbeeld 20: $^{-}12 - {}^{-}4 = 8$ as volg verduidelik: *12 - 4 = 8, daarom* $^{-}12 - {}^{-}4 = 8$. Daar is dus net ʼn vermiste skakel, die ketting lê gereed om gebruik te word.

Dus: Uit die leerlinge se toepassing van foutiewe strategieë, lei die onderhoudvoerder tog die vlak van gereedheid en die aard van hul intuïsies af.

* Soos Nr. 15, maar die leerling probeer patrone soek:
  Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 15: $5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$
  Rikkie (12 : 4) sê: *5 - 8 = ⁻3, maar dis*
  5 - ⁻8, maar dis ⁻8, daarom 5 - ⁻8 = ⁻3.

* die leerling het wel die begrip $- \, ^{-} = +$ (kategorie 60) saam met kategorie 15 (kategorie 83). (Die negatiewe teken van ʼn getal is ʼn aanduider van die teken van die antwoord.)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 18, $^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}13$

Adriana (13 : 3) sê: *Tel 5 grade by 8 grade. Dit is 13 grade. Sit ´n minus voor, want dis* $^{-}5$

Hierdie leerling toon insig. Sy besef dat $- \; ^{-}$ ´n opwaartse beweging op die termometer verteenwoordig. Ook by bewerkingsvoorbeeld 6 toon sy insig.
$5 + {}^{-}11 = {}^{-}6$, *as jy 5 grade het, trek 5 af dan bly daar 6 oor en ek trek nog 6 van 0 af.*

Dit lyk dus asof sy nul as identiteitselement vir optelling gebruik.

b) <u>Die negatiewe tekens van die getalle word as bewerkingstekens aangewend (kategorie 12)</u>

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 9: $12 + {}^{-}7 = 12$

Petrie (13 : 1) sê: *12 + 7 = 19 en 19 - 7 = 12.*

Daar is ´n ryke vonds van variasies vir hierdie bewerkingsvoorbeeld:

* Die bewerkingsteken word aan die laaste getal gekoppel (kategorie 8)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 16:

$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}5 + {}^{-}4 = {}^{-}9$

en dan $^{-}5 - {}^{-}9 = {}^{-}4$ aldus Donovan (12 : 9)

* Die bewerkingsteken of die teken van die tweede getal word weer aan die eerste getal gekoppel (kategorie 13)
<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 9: $12 + {}^{-}7 = 7$
Andrie (12 : 9) sê: *7 + 7 = 14,* *14 - 12 = 2.*

* Omdat die tekens van die getalle as bewerkingsgetalle beskou word, word die bewerking as onvolledig beskou (kategorie 23).
<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 17: ${}^{-}8 - {}^{-}3 = 5$
Soekie (12 : 9) sê: *Daar is niks om 8 en 3 van af te trek nie, dus word dit 8 - 3 = 5.*

* Soos kategorie 23, maar daar word ´n nul voor die negatiewe getalle gelees. (kategorie 24)
<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 2: ${}^{-}8 - 3 = {}^{-}11$.
Wennie (13 : 5) sê: *0 grade ${}^{-}8$ grade ${}^{-}3$ grade = ${}^{-}11$ grade .*

Streng gesproke is dit korrek om *0 - 8* te sê, maar dit dui daarop dat die leerling nie die verhewe negatiewe teken voor die 8 as ´n gerigtheidsteken sien nie, maar as ´n bewerkingsteken. Dit blyk verder uit sy hantering van bewerkingsvoorbeeld 18: *${}^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}13$.* $0 - 5 - 8 = -13$, dat hy die tweede gerigtheidsteken ook só behandel.

Hierdie spesifieke leerling toon ook insig in die verskil tussen die aard van die bewerking aftrek en die proses van aftrekking wanneer twee getalle met verskillende tekens opgetel word.

Bewerkingsvoorbeeld 6: 5 + $^{-}11$ = $^{-}6$, 11 - 5 = 6, maar die antwoord is $^{-}6$.

Dit sou geskik wees om aan ´n leerling wat intuïtief hierdie aftrekproses toepas, ´n reël te leer in die verband. Dit sou wees om bestaande intuïsies te implementeer in die keuse van onderrigstrategie.

Verdere variasies op kategorie 23 is die blokkiemetodes:

* die leerling soek ´n blokkie wat ingevul moet word tussen die bewerkingsteken en die teken van die tweede getal (kategorie 28).
  <u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 8: 10 + $^{-}7$ = 7
  Andrie (12 : 9) sê: *10 + 4 - 7 = 7. 7 + 7 = 14. Trek 4 af dan kry jy 10.*

* die leerling soek ´n blokkie en probeer dan nul as antwoord kry (kategorie 29).
  <u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 17: $^{-}8$ - $^{-}3$ = 0

Hierdie getalspeletjie wat sy in 13 van die 21 gevalle aanwend, hou haar baie lank besig. In die voorbereidende taakkaarte het sy bevredigend gevaar en ook bewerkingsvoorbeeld 1: 5 - 8 korrek gedoen.

* Leerlinge gebruik slegs die teken van die tweede getal as ´n bewerkingsteken, as albei negatief is, (kategorie 45)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 20: $^{-}12 - {}^{-}4 = 4$

Kosie (14 : 6) sê: *12 - 4 - 4 = 4.*

Hierdie leerling ignoreer telkens die teken van die eerste negatiewe getal (kategorie 67).

* Beskou die tekens van die getalle as bewerkingstekens, maar werk ook dubbeld met die bewerkingsteken (kategorie 79)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 12: $^{-}3 + {}^{-}5 = 0$

Andrie (12 : 9) sê: *5 + 3 = 8, 8 - 3 = 5, 5 + ⁻5 = 0.*

* soos (ii) maar gebruik dan die vertikale getallelyn (kategorie 73.)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 12: $^{-}3 + {}^{-}5 = 0$

Willem (12 : 5) sê: *3 + 5 = 8, 8 - 5 = 3, 3 - 3 = 0 grade.*

* soos (ii), maar beskou ook die negatiewe getalle se tekens as aanduiders van die teken van die antwoord. (kategorie 77)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 12: $^{-}3 + {}^{-}5 = {}^{-}5$

Billy (13 : 3) sê: *3 + 5 - 5 = 3. Dis ⁻3 want daar staan ´n minus voor vyf en dan moet hy in die antwoord kom.*

* die negatiewe tekens word wel as bewerkingstekens beskou, maar daar word ´n plus as bewerkingsteken "ingelees". (kategorie 65).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 16: $^{-}5 - {}^{-}2 = 0$.

Andrie (12 : 9) sê: *$2 + 5 = 7$, $7 - 5 - 2 = 0$.*

Daar is ´n variasie op hierdie bewerkingsvoorbeeld:

* soos kategorie 65, maar die bewerkingsteken of die teken van die tweede getal word weer aan die eerste getal gekoppel (kategorie 78).

  <u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 18: $^{-}5 - {}^{-}8 = 0$.

  Andrie sê: *$8 + 5 = 13$, $13 - 5 = 8$, $8 - 8 = 0$.*

* Leerlinge kan die dubbele minusteken nie akkomodeer nie en beskou dit as twee maal die tweede getal (kategorie 85).

  <u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 17: $^{-}8 - {}^{-}3 = {}^{-}2$

  Lientjie (12 : 4): *$8 - 3 - 3 = 2$ en dis $^{-}8$ daarom $^{-}2$.*

  ´n Variasie hierop is vir bewerkingsvoorbeeld 10: $^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = {}^{-}4$:

  $^{-}4 + 4 = 0$; $0 - 4 = {}^{-}4$, $^{-}4 + {}^{-}4 = 0$, $0 - 4 = {}^{-}4$

  aldus Cornèl (14 : 6) (kategorie 72 en 81)

* ignoreer die negatiewe teken van die tweede getal (kategorie 93).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 5: $3 + {}^{-}5 = 8$

Handrè (14 : 1) sê: *$3 + 5 = 8$.*

´n Variasie tree in wanneer die eerste getal negatief is en dié teken as bewerkingsteken aangewend word (kategorie 94).

Handrè sê vir bewerkingsvoorbeeld 12: ${}^{-}3 + {}^{-}5 = 5$:
$5 + 3 = 8$, $8 - 3 = 5$.

Hierdie uiteensetting van die verskillende maniere waarop die tekens van die getalle as bewerkingstekens aangewend word, mag onnodig langdradig voorkom, maar hieruit kan die volgende belangrike afleidings gemaak word:

* leerlinge is vindingryk in hul pogings om ´n onverstaanbare begrip te akkomodeer.

* daar is soveel idees en metodes as wat daar kinders is.

* leerlinge toon soms merkwaardige insig, maar een wanopvatting kan tot gevolg hê dat hulle feitlik al die gevalle verkeerd het.

* Soms lê die sleutel tot aansluiting by die intuïtiewe denke van die kind in sy aanwending van ´n verkeerde denkstrategie.

c) Pogings om aan te dui dat die bewerking nie gedoen kan word nie

Die minusteken is ´n aanduider dat die bewerking nie gedoen kan word nie (kategorie 17).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 18: $^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}8$.

Soekie (12 : 9) sê: *5 kan nie van 8 afgetrek word nie, daarom is dit* $^{-}8$.

* die bewerking kan nie gedoen word nie, daarom kry die eerste getal ´n negatiewe teken. (kategorie 54)

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 1: $5 - 8 = {}^{-}5$.

Antonie (13 : 3) sê: *5 kan nie van 8 afgetrek word nie, toe word dit* $^{-}5$.

In die twee laasgenoemde gevalle vermoed die onderhoudvoerder dat die leerlinge onder mekaar gepraat het en dat die twee aangehaalde leerlinge die klok hoor lui het oor die negatiewe getal, maar nog nie kon vasstel waar die bel hang nie.

* Soos die vorige, maar die leerling gee ook ´n aanduiding dat die negatiewe getalle die antwoord se teken bepaal (kategorie 62.)

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 1: $5 - 8 = {}^{-}3$

Hannaleen (12 : 5) sê: *Jy kan dit nie doen nie, maar* $8 - 5 = 3$, *daarom is die antwoord* $^{-}3$.

* die minusteken dui aan hoeveel jy kort om wel te kan aftrek (kategorie 98).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 5: $3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$

Christelle (13 : 4) sê: *Jy moet eers 2 by 3 tel om 5 te kan aftrek, dan is dit ⁻2.*

Hierdie strategie bevat die kern van ´n nuttige onderrigstrategie, want dit kan uitgebrei word na die verskil in grootte van die twee getalle. Dit dui ook op merkwaardige insig ten opsigte van die negatiewe getal as bewerkingsgetal.

Hierdie leerling het die strategie reeds by Taakkaart A vir 4 - 9 gebruik en die onderhoudvoerder het haar direk daarna Taakkaart B1 aangebied om aan haar die geleentheid te gee om hierdie strategie verder te ontplooi sonder die moontlike verwarrende tussenkoms van die termometer as denkhulpmiddel.

In die loop van taakkaart B1 wend sy egter ´n verskeidenheid ander strategieë aan. Korrekte intuïsies soos die analogie-idee kom voor, maar ook foutiewe grootte-orde begrip en ander foutiewe strategieë.

* die bewerking kan nie gedoen word nie en die leerling sê dit, of: *Ek weet nie.* (kategorie 40).

* die leerling sê duidelik dat jy nie ´n groot getal van ´n klein getal kan aftrek nie (kategorie 41). Dit raak die gevalle:

1 : $5 - 8$

15 : $5 - {}^{-}8$

18 : ${}^{-}5 - {}^{-}8$

Verskeie variasies van hierdie bewerkingsvoorbeeld kom ook voor:

* die toetsmetode word daarmee saam gebruik (kategorie 43)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 5: $3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$

Donovan (12 : 9) sê: *Jy kan nie 5 van 3 aftrek nie, daar is die antwoord ⁻2, want daar moet 2 by 3 bykom om 5 te kry.*

Hierdie antwoord sluit ook nou aan by kategorie 98 en Christelle se verduideliking.

* Sê dat jy nie ´n groot getal van ´n kleiner een kan aftrek nie, maar ignoreer dan die negatiewe tekens van die getalle. (kategorie 53).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 15: $5 - {}^{-}8$ = *kan nie* en Terry (13 : 10) Voeg by: *want 5 - 8 kan nie.*

* By kategorie 41 (Jy kan nie ´n groot getal van ´n kleiner een aftrek nie) word bygevoeg dat die tekens van die getalle as bewerkingstekens gesien word (kategorie 64).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 15: 5 - $^{-}8$ = *onmoontlik*

en

Sanet (12 : 10) voeg by: 8 is groter as 5 en 5 - 5 = 0, 0 - 8 is onmoontlik.

Hierdie leerling hanteer die negatiewe getalle baie verward. Sy weet nie wat om te doen as sy soos in die aangehaalde bewerkingsvoorbeeld iets probeer met die negatiewe tekens en sy kry weer ´n bewerkingsvoorbeeld waar *´n grote van ´n kleintjie afgetrek* moet word nie.

* saam met kategorie 41, ignoreer die teken van die tweede getal in bv. $^{-}5$ - $^{-}8$ (kategorie 66).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 18: $^{-}5$ - $^{-}8$ = 0 en

Nita (12 : 6) sê: *Jy kan nie ag met 5 aftrek nie.*

* die bewerkingsteken en die negatiewe teken van die tweede getal, word vir die tweede getal gebruik, en dan kategorie 41 (kategorie 75).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 15: 5 - $^{-}8$ = *kan nie*

Willem (12 : 5) sê: *$^{-}8$ - 8 = 16, 5 - 16 kan nie.*

* die idee dat die onderste bewerkingsgrens nul is, saam met kategorie 41 (kategorie 80).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 15: 5 - $^{-}8$ = 0

Hentie (14 : 6) sê: *5 grade C, minus 8. 8 kan nie van 5 afgetrek word nie.*

* Bewerkingsteken of teken van tweede getal word weer aan die eerste getal gekoppel, maar met kategorie 41 (kategorie 97).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 15: $5 - {}^{-}8$ = *kan nie*

Sanet (12 : 10) sê: *8 - 5 = 3, 3 - 5 kan nie.*

* die desimale breuk word gebruik om aan te toon dat die antwoord nie ʼn telgetal is nie (kategorie 18).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 5: $3 + {}^{-}5 = 2,5$

Gwen (12 : 8) sê: *Dit beteken ek moet ⁻5 van 3 aftrek.*

d) Die onderste bewerkingsgrens is nul

* Die leerlinge verstrek nul as die antwoord, op enige bewerking waar die aftrekker numeries groter as die aftrekgetal is (kategorie 30).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 2: ${}^{-}8 - 3 = 0$

Willem (12 : 5) sê: *8 - 3 = 5, 5 - 8 = 0.*

* Die onderste bewerkingsgrens is nul, maar die leerling ignoreer ook die teken van die eerste getal en beskou die negatiewe teken van die tweede getal as ʼn bewerkingsteken (kategorie 74).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 18: ${}^{-}5 - {}^{-}8$ = *kan nie*, want Willem (12 : 5) sê: *8 kan nie van 5 afgetrek word nie, dus 5 - 8 = 0 en 0 - 8 kan nie.*

e) <u>Die negatiewe getal word as nul beskou</u> (kategorieë 31, 48 en 57)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 6: 5 + ⁻11 = 0

Sanet (12 : 10) sê: *⁻11 = 0, 5 + 0 = 0.*

* kategorie 56 (Neem die teken van die tweede negatiewe getal as ´n bewerkingsteken) word verder gevoer sodat die eerste negatiewe getal nul is en die teken van die tweede een as bewerkingsteken dien.

f) <u>Die negatiewe tekens van die getalle word bloot geïgnoreer</u> (kategorie 19, 84).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 11: ⁻5 + ⁻3 = 8

Terry (13 : 10) sê: *Dis 5 + 3.*

Hierdie leerling pas hierdie strategie toe in 16 van die 21 bewerkingsvoorbeelde.

* die negatiewe teken van die tweede getal word geïgnoreer in ´n bewerkingsvoorbeeld soos 16: ⁻5 - ⁻2 en dan word die vertikale getallelyn aangewend (Kategorie 52.)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 16: ⁻5 - ⁻2 = ⁻7

Nettie sê: *Ek het minus 5. Trek nog twee af, dan staan die termometer op -7.*

* die negatiewe tekens van die getalle word geïgnoreer en die onderste bewerkingsgrens is nul (kategorie 68)

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 15: $5 - {}^{-}8 = 0$

Emsie (13 : 0) sê: *5 - 8 is nul.*

g) Die leerling word oënskynlik verwar deur die bewerking "aftrek" en die proses van aftrekking wanneer 'n negatiewe en positiewe getal bymekaar getel word (kategorie 20).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 5: $3 + {}^{-}5 = 8$

Didi (13 : 1) sê: *3 bo nul 0 grade , minus 5 onder, dan tel ons bymekaar.*

h) Die antwoord word beïnvloed deur 'n probleem met grootte-orde (kategorie 22)

Die leerling ondervind 'n probleem dat as hulle 3 van $^{-}8$ moet aftrek, klink $^{-}11$ vir hulle groter as $^{-}8$. Hulle besef nie $^{-}11 < {}^{-}8$ nie. Nou skryf hulle $^{-}5$, want 5 is numeries kleiner as 8.

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 2: ${}^{-}8 - 3 = {}^{-}5$

Frikie sê: *Ek het ⁻8 grade met 3 geminus.*

(Hierdie voorbeeld verteenwoordig ook kategorie 87 wat spesifiek die termometer meld).

* Die geval $^{-}a - {}^{-}b$ $a > b$, byvoorbeeld $^{-}12 - {}^{-}4$, word ook deur ´n grootte-orde probleem gekenmerk en dan word die negatiewe teken van die tweede getal geïgnoreer (kategorie 51).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 20: $^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}16$

Nettie (12 : 10) sê: *$^{-}12$, trek nog 4 grade af, dan is dit $^{-}16$, maar 16 > 12?*

* die leerling beskou wel $- \, ^{-}$ as +, maar het ´n grootte-orde probleem (kategorie 90).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 15: $5 - {}^{-}8 = {}^{-}13$

Japie (14 : 0) sê: *$5 + 8 = 13$. Dis $^{-}13$, want dit is nou kouer.*

i) <u>Aftrekking word as kommutatief beskou</u> (kategorie 38)

Die leerlinge begin graag by die kleinste getal, of dan die negatiewe getal, reken, veral as hulle die vertikale getallelynstrategie gebruik. Dit gebeur dan dat hulle in ´n poging om dit te handhaaf, aftrekking as kommutatief behandel.

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 15: $5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$

Johannes (12 : 2) sê: *Ek het 5 van 8 afgetrek toe kry ek $^{-}3$, want dis 8.*

Daar kom ook heelwat kombinasies van hierdie strategie met ander strategieë wat reeds behandel is, voor. Die kombinasie sal net kortliks genoem word en voorbeelde sal net in interessante gevalle aangehaal word.

* aftrekking word as kommutatief beskou en die tekens van die getalle word as bewerkingstekens gebruik (kategorie 44).

* aftrekking word as kommutatief beskou en die bewerkingsteken en die negatiewe teken van die tweede getal word op die tweede getal toegepas (kategorie 50).

* aftrekking word as kommutatief beskou en die negatiewe tekens van die getalle word beskou as aanduiders van die teken van die antwoord (kategorie 58).

* aftrekking word as kommutatief beskou en die termometertaakkaart word geraadpleeg (kategorie 61).

* aftrekking word as kommutatief beskou en die negatiewe tekens van die getalle word geïgnoreer (kategorie 69). Vir kategorie 71 word net die negatiewe teken van die eerste getal geïgnoreer.

* + - word as - beskou, die vertikale getallelyn word gebruik en aftrekking word as kommutatief beskou (kategorie 96).

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 6: 5 + ⁻11 = 6 grade.

Jakkie sê: *11 - 5 = 6 grade.*

Hy beskou dus + - as - en dan terselfdertyd die aftrek proses, aangedui deur die -, as kommutatief. Die feit dat hy 6 grade sê, dui aan dat hy op die termometer wat 'n praktiese voorbeeld van die vertikale getallelyn is, werk.

j) <u>Jou antwoord is positief as jy optel en negatief as jy aftrek</u> (kategorie 32)

<u>Voorbeeld</u>: Bewerkingsvoorbeeld 7: 8 + ⁻5 = 13

Mornè (13 : 1) sê: *Jy tel op, daarom is dit 13 al is dit ⁻5.*

Hierdie leerling erken die minusteken beteken onder vriespunt, maar reken konsekwent dat as die bewerkingsteken plus is, jou antwoord positief is en as die bewerkingsteken minus is, jou antwoord negatief is.

Hierdie leerling erken dus die gerigtheidstekens en kan maklik na analogie met positiewe getalle of met die vertikale getallelyn as denkhulpmiddel onderrig word.

k) <u>Vermenigvuldigingstrategieë</u> (kategorie 37)

Daar word by die positiewe getal geleen om die negatiewe getal nul te maak. Dan is die vermenigvuldiger een keer minder.

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 14: $^{-}6 \times 3 = 12$

Adriana (13 : 3) sê: *$^{-}6 + 6$ is nul en $6 \times 2 = 12$.*

Hierdie foutiewe strategie ontwikkel wanneer die vertikale getallelyn hier toegepas word.

* die variasie is dat die negatiewe teken van die getal as bewerkingsteken gebruik word (kategorie 46).

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 14: $^{-}6 \times 3 = 12$

Johannes (12 : 2) sê: *$6 \times 3 = 18$, $18 - 6 = 12$.*

l) Sien + ^{-}a as nul (kategorie 70)

Dit is 'n foutiewe weergawe van $a + {}^{-}a = 0$.

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 10: $^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = {}^{-}4$

Hentie (14 : 6) sê: *$^{-}4 + 0 + 0 = {}^{-}4$.*

* die variasie hier kom voor waar die teken van die laaste getal geïgnoreer word:

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 10: $^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 = 4$

Cornèl (13 : 2) sê: *$^{-}4 + {}^{-}4 = 0$, $0 + {}^{-}4 = 4$.*

m) Kategorie 55 verteenwoordig onverstaanbare strategieë

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 21: $^{-}4 \times {}^{-}5 = 36$.

Joanie (13 : 7) sê: *$4 + 5 \times 36$.*

n) <u>Kategorie 0 verteenwoordig verwronge reëls soos byvoorbeeld Charl wat die vermenigvuldigingsreëls ook by optel en aftrek toepas</u>.

<u>Voorbeeld</u>: <u>Bewerkingsvoorbeeld 2</u>: $^{-}8 - 3 = {}^{-}5$

Charl (12 : 9) sê: *voor 3 staan eintlik ´n plus en as jy ´n plus en ´n minus het, is jou antwoord minus.*

o) <u>Kategorie 100 verteenwoordig die gevalle waar leerlinge die getalle op die termometer as vaste getalle beskou en nie daarmee kan werk nie</u>.

<u>Voorbeeld</u>: <u>Bewerkingsvoorbeeld 4</u>: $7 + {}^{-}7 =$

Grietjie (12 : 0) sê: *Ek het 7 bo vriespunt en 7 onder vriespunt. Ek weet nie hoe om dit bymekaar te tel nie.*

6.3.4 Hieronder volg nou Tabel 12 wat die aantal keer wat ´n spesifieke rede ´n korrekte antwoord opgelewer het, weergee.

Daarna volg Tabel 13 wat die aantal keer wat ´n spesifieke rede vir ´n verkeerde antwoord gebruik is, weergee.

Let wel, by Tabel 12, kan redes gelys word wat nie ´n korrekte denkstrategie verteenwoordig nie. Byvoorbeeld; kategorie 15 lui dat die negatiewe tekens van die getalle beskou word as ´n aanduiding van die teken van die antwoord. Vir 96 korrekte antwoorde is hierdie rede aangevoer.

In die gevalle waar die tekens van beide getalle negatief is, bv. bewerkingsvoorbeeld 17: $^{-}8 - {}^{-}3$

16: $^{-}5 - {}^{-}2$

20: $^{-}12 - {}^{-}4$

11: $^{-}5 + {}^{-}3$

12: $^{-}3 + {}^{-}5$

lewer hierdie foutiewe denkstrategie ´n korrekte antwoord.

By Tabel 13 kan redes gelys word wat wel ´n korrekte denkstrategie verteenwoordig, maar deur inmenging van byvoorbeeld rekenfoute of die oorsien (skynbaar nalatig) van ´n negatiewe teken, ´n verkeerde antwoorde oplewer. Byvoorbeeld, kategorie 60 is 7 keer vir ´n korrekte antwoord en 5 keer vir ´n verkeerde antwoord gebruik.

Leonie (12 : 11) sê vir bewerkingsvoorbeeld 19:

$^{-}7 - {}^{-}7 = {}^{-}1$: *$^{-}7 + 7 = 1$ en dis $^{-}1$, want dis $^{-}7$.* Daar is dus die inmenging van kategorie 15 (dat die teken van die negatiewe getal die teken van die antwoord bepaal) en ´n rekenfout of die verwarring van die identiteitselemente vir optelling en aftrekking.

Die toepassing van die strategie kon tot regte sowel as verkeerde antwoord aanleiding gegee het.

Byvoorbeeld, kategorie 2 lui:

* Die vertikale getallelyn met spesifieke verwysing na die termometer, grade of vriespunt word gebruik. Sy toepassing het 108 korrekte antwoorde en 55 verkeerde antwoorde opgelewer.

'n Voorbeeld van die onvanpaste gebruik van hierdie strategie is:

Voorbeeld: Bewerkingsvoorbeeld 17: $^{-}8 - {}^{-}3 = {}^{-}5$.

Jennie (12 : 2) sê: *$^{-}8$ grade - 3 grade = $^{-}5$ grade.*

Elke rede kon 2037 keer gebruik geword het, want 97 leerlinge het elk 21 bewerkings gedoen.

Tabel 12:

Strategie nr	Frekwensie	Strategie nr	Frekwensie
0	9	39	2
1	85	42	1
2	108	48	1
3	25	49	4
4	12	51	4
5	15	55	3
6	252	58	1
10	1	59	5
12	7	60	7
14	16	61	1
15	96	65	1
17	4	69	1
19	21	70	1
21	2	72	1
22	3	76	1
23	30	77	1
24	3	86	1
25	19	87	5
27	10	88	1
29	2	89	48
32	3	91	1
33	3	92	10
34	33	94	1
36	13	95	2
38	3	98	1
		99	1

Frekwensietabel vir strategieë wat aanleiding gegee het tot korrekte antwoorde.

Die kategorieë vir wiskundig aanvaarbare strategieë wat in 6.4.2 breedvoerig bespreek is, is in die tabel onderstreep

Tabel 13:

Strategie nr.	Frekwensie	Strategie nr.	Frekwensie
0	22	52	4
1	4	53	7
2	55	54	1
3	11	55	14
4	6	56	2
5	2	57	6
6	35	58	8
8	6	60	5
10	3	62	1
12	151	63	2
13	15	64	3
14	2	65	12
15	119	66	1
17	19	67	9
18	1	68	2
19	211	69	4
20	1	70	11
22	22	71	1
23	19	72	17
24	12	73	1
25	1	74	1
27	5	75	5
28	3	76	1
29	13	77	6
30	2	78	2
31	3	79	2
32	14	80	4
34	11	81	4
36	1	82	1
37	11	83	1
38	27	84	1
39	17	85	13
40	2	87	8
41	52	89	9
44	2	90	1
45	6	92	11
46	1	93	15
47	1	94	10
48	23	96	2
49	4	97	7
50	5	98	1
51	3	100	20

Frekwensietabel vir strategieë wat aanleiding gegee het tot verkeerde antwoorde

Die kategorieë wiskundig onaanvaarbare strategieë wat in paragraaf 6.4.3 breedvoerig bespreek is, is onderstreep in dié tabel.

6.3.5 Die hoof-kategorieë van strategieë (korrek en foutief)
- 'n bespreking waar frekwensie, nuttigheidswaarde en onderrigstrategieë ter sprake kom

In elke geval word direk onder die strategie twee getalle verskaf; die eerste verteenwoordig die frekwensie van die spesifieke strategie in die 21 gevalle wat 97 leerlinge aangepak het, d.w.s. uit 'n moontlike voorkoms van 2037; die tweede getal verteenwoordig die aantal verskillende leerlinge wat 'n bepaalde strategie gebruik het. Met die subkategorieë wat by die hoofkategorieë ingevoeg is, mag dit wees dat een leerling onder die hoofkategorie en later weer vir 'n ander bewerkingsvoorbeeld onder die subkategorie ingedeel is en dan dubbeld getel word.

Daar word egter aanvaar dat die frekwensie van so 'n oorvleueling onbeduidend klein is.

a) Die wiskundig aanvaarbare strategieë

i) Die vertikale getallelyn (voorkoms: 185; leerlinge: 78)

Dit is opmerklik dat 78 uit die 97 leerlinge hierdie strategie gebruik, maar as in ag geneem word dat hulle Taakkaart C2 (termometervel) in die onderhoud gedoen het, is dit te verstane.

Hierdie strategie kan met vrug aangewend word in die onderrig van negatiewe getalle, maar dit kan slegs van die makliker gevalle akkomodeer. Gevalle waar die teken van die tweede getal negatief is, is deur geeneen van die ondersoekpersone in hierdie ondersoek só gedoen nie.

ii) <u>Formele logika</u> (voorkoms: 292; leerlinge: 72)

Hoofsaaklik analogie met positiewe getalle word deur die leerlinge gebruik.

Dit is noemenswaardig dat 72 uit die 97 leerlinge vir die een of ander bewerkingsvoorbeeld van analogie gebruik maak. Die afleiding kan gemaak word dat die metode sterk intuïtief by die leerlinge teenwoordig is.

Analogie met positiewe getalle is die effektiefste as dit gebruik word in gevalle waar die tekens van die getalle dieselfde is. Die derde moeilikste geval vir die st.7's $^-a - {}^-b$, $a > b$, $({}^-12 - {}^-4 = {}^-8)$ word die maklikste geval vir die st.5's as dit intuïtief na analogie met positiewe getalle hanteer word.

Vir die drie moeilikste gevalle vir st.5:

$^-a - b$, $a > b$ bv $^-8 - 3$

$^-a - {}^-b$, $b > a$ bv $^-5 - {}^-8$

$^-a - {}^-b$, $b > a$ bv $5 - {}^-8$,

waarvan die laaste twee gevalle ook die moeilikste gevalle vir st.7 is, is daar moontlik makliker strategieë. Dit vereis ŉ hoë sensitiwiteit vir formele logika om te verstaan dat:

$5 - 8 = {}^{-}3$

d.w.s. $5 - {}^{-}8 = {}^{+}3$

ŉ Alternatief sou wees: $5 - 8 = {}^{-}3$ (verminder)

$5 - ? = {}^{+}13$ (vermeerder)

Die idee van patrone, d.w.s. om dieselfde getalle met ŉ verskillende kombinasie van tekens te gebruik, kom dus ook hier ter sprake:

$2 - 3 = {}^{-}1$ (daling)

$2 - 2 = 0$

$2 - 1 = 1$

$2 - 0 = 2$

$2 - {}^{-}1 = {}^{+}3$

$2 - {}^{-}2 = {}^{+}4$

$2 - {}^{-}3 = {}^{+}5$ (styging)

${}^{-}5 - 8 = {}^{-}13$ (daling)

d.w.s. ${}^{-}5 - {}^{-}8 = 3$ (styging)

iii) <u>Die toetsmetode</u> (voorkoms: 12; leerlinge: 6)

Die leerlinge pas die metode wat hulle geleer het om die antwoorde verkry deur aftrekking, te toets, ook toe op die berekenings met heelgetalle. Hierdie metode, korrek toegepas, dui op ŉ hoë vlak van formele denke, maar sal die aanleer van bewerkings met negatiewe getalle vir die gemiddelde leerling onnodig verswaar, omdat baie leerlinge nie 'n gepaste bewerking om 'n sekere resultaat te toets, herken nie.

iv) Patroonmatigheid: (voorkoms: 5; leerlinge: 5)

Die leerlinge gebruik dieselfde getalle met verskillende tekenkombinasies om die antwoord van 'n bewerking af te lei, bv.:

$5 - 8 = {}^{-}3$ $\qquad$ ${}^{-}5 - {}^{-}8 = 3$

$5 + 8 = 13$ $\qquad$ $5 - {}^{-}8 = ?$

Hierdie intuïsie dui ook op 'n gesofistikeerde formele denkvlak en dit kan met bogemiddelde leerlinge stimulerend gebruik word by bewerkings van die volgende aard:

$a - {}^{-}b,\ b > a;\quad {}^{-}a - {}^{-}b,\ b > a$

v) Die verskil in numeriese grootte (voorkoms: 2; leerlinge: 2)

Hierdie intuïsies word gebruik by aftrekbewerkings en dui soos die voorafgaande twee intuïsies op 'n gesofistikeerde vlak van formele denke.

Die leerling sal dus byvoorbeeld redeneer dat $5 - {}^{-}8 = {}^{+}13$, want 5 is 13 plekke groter as ${}^{-}8$.

Dit kan ook geïnterpreteer word as die afstand tussen die twee getalle op die vertikale getallelyn.

Dit kan soos bogenoemde strategieë met vrug gebruik word in die hantering van die twee moeilike gevalle

$^{-}a - {}^{-}b, \quad b > a$ bv $^{-}5 - {}^{-}8$

$a - {}^{-}b, \quad b > a$ bv $5 - {}^{-}8$

vi) <u>Die optelling van ´n negatiewe en ´n positiewe getal word as die proses van aftrekking verstaan</u> (voorkoms: 13; leerlinge: 7).

Dit wil sê $12 + {}^{-}7$ word verstaan as $12 - 7$ en die antwoord is positief, want die numeries grootste getal is positief.

Hierdie leerlinge sou beskou kon word as gereed om ´n bewerkingsreël te leer, omdat hulle die logika daaragter verstaan.

vii) <u>Denkhulpmiddel (skuld)</u> (voorkoms: 19; leerlinge: 1)

Dit word spontaan deur een leerling vir 19 van die 21 bewerkingsvoorbeelde gebruik. Hy pas dit besonder goed toe, maar ´n geval soos $^{-}a - {}^{-}b, \; a > b$ bv $^{-}12 - {}^{-}4$ word bemoeilik deur die denkhulpmiddel, waar die kinders dit andersins intuïtief baie maklik formeel logies hanteer.

$^{-}12 - {}^{-}4$ word dan: Ek skuld R12, maar R4 skuld word weggeneem, dan skuld ek R8. Die probleem is egter om die "skuld wegneem" proses te verantwoord.

viii) $- {}^{-}$ word hanteer as $+$ in bv. ${}^{-}5 - {}^{-}2$ (voorkoms: 9; leerlinge: 4)

Dit dui op die intuïtiewe aanvoeling dat dit verskil van $+$ ${}^{-}$ en dat die rigting van beweging op die vertikale getallelyn dus moet verander. Vir leerlinge met hierdie intuïsie kan die onderwyser die intuïsie probeer verifieer en dan die toepaslike reëls verskaf, bv.:

$- \times - = +$

$- \times + = -$

$+ \times - = -$

ix) $+ {}^{-}$ word hanteer as $-$ (voorkoms: 3; leerlinge: 3).

Hierdie intuïsie sluit aan by die leerlinge se begrip van die proses van aftrekking by die optel van getalle met verskillende tekens.

Die praktiese denkhulpmiddel, naamlik die vertikale getallelyn, kan hier met vrug ter illustrasie aangewend word.

(x) Aftrekking. *Ek het x en kan dus x weggee* (voorkoms: 85; leerlinge: 81)

81 uit die 97 leerlinge gee getrou rekenskap van hoe hul die aftrekbewerking aangeleer het, maar dit is presies

hierin wat die kern van die probleem setel wat aanleiding gee tot foutiewe strategieë soos,

* *jy kan nie 'n groot getal van 'n kleintjie aftrek nie*

en

* die onderste bewerkingsgrens is nul.

Uit bogenoemde bespreking volg dat daar nie eintlik 'n geskikte intuïsie na vore kom om $^-8 - 3$ te verduidelik nie. 'n Praktiese denkhulpmiddel (vertikale getallelyn) sou hier aangewend kon word of formele logika as dit herskryf word na $^-8 - {}^+3$.

b) <u>Foutiewe denkstrategieë</u>

In elke geval gaan hier gepoog word om die positiewe intuïsies wat die foutiewe denkstrategie aan die lig bring uit te wys en te kyk deur watter korrekte strategie die genoemde foutiewe een geremedieer kan word.

i) <u>Die negatiewe tekens van die getalle is aanduiders van die teken van die antwoord</u> (voorkoms: 123; leerlinge: 30)

Hierdie foutiewe denkstrategie behels egter dat die leerlinge die gerigtheidstekens (tekens van die getalle) as sulks erken.

Soos reeds genoem in paragraaf 6.3.4 lewer hierdie foutiewe denkstrategie 'n korrekte antwoord in die gevalle wat deur analogie met positiewe getalle hanteer kan word. Dus kan remediëring juis daar aansny. Die vertikale getallelyn kan egter ook gebruik word.

ii) Alle tekens word as bewerkingstekens beskou (voorkoms: 346; leerlinge 61)

61 uit die 97 leerlinge gebruik hierdie foutiewe strategie om die negatiewe getalle te hanteer.

Die verhewe minusteken kan van gróot waarde wees in die remediëring hiervan. Die praktiese inkledings soos skuld en die termometer kan ook waardevol wees om die leerlinge te laat insien dat die teken van die getal sy grootte bepaal.

Analogie kan ook aangesny word deur gewone bewerkings met positiewe heelgetalle te herskryf as:

$3 + 2 = {}^{+}3 + {}^{+}2$

$8 - 3 = {}^{+}8 - {}^{+}3$

iii) Leerlinge voer aan dat bewerkings met negatiewe getalle nie gedoen kan word nie (voorkoms: 119; leerlinge: 47).

Dit is onrusbarend dat 48% van die leerlinge by een of ander geval hierdie rede aanhaal, maar soos reeds telkens gemeld, is hul die slagoffers van ´n onderrigsisteem wat hiertoe aanleiding gee.

Aangesien in die onderhoud die termometer as denkhulpmiddel bekendgestel is, en dit nie die gewenste resultate getoon het nie, kan formele logika (analogie met positiewe getalle) eerder aangewend word.

iv) Die onderste bewerkingsgrens is nul (voorkoms: 3; leerlinge: 3)

Hierdie leerlinge besef nie dat die telgetalle uitgebrei kan word na negatiewe heelgetalle nie, maar erken die tekens van die getalle as gerigthiedstekens.

Die vertikale getallelyn kan hier remediërend aangewend word.

v) Negatiewe getalle is gelyk aan nul (voorkoms: 32; leerlinge: 10)

Dit sluit aan by (iv) en kan op dieselfde manier geremedieer word.

vi) Die negtiewe tekens van getalle word geïgnoreer (voorkoms: 218; leerlinge: 36)

Hierdie leerlinge beskou nie die tekens van die getalle as gerigtheidstekens nie. Hierdie strategie kan deur middel van analogie met positiewe getalle geremedieer word.

vii) <u>Die proses van aftrek by die som van twee getalle met verskillende tekens, word verwar met die bewerking aftrek</u> (voorkoms: 1; leerling: 1)

Deur middel van formele logika kan die twee gevalle afsonderlik verduidelik word, bv.:

$$5 + {}^{-}8 = (5 + {}^{-}5) - 3 = {}^{-}3$$

$$5 - 8 = (5 - 5) - 3 = -3$$

Dit is belangrik vir effektiewe leer dat die leerlinge dit begryp voordat hulle die volgende reël toepas:

$$5 + {}^{-}8 = 5 - 8$$

viii) <u>Die grootte-orde probleem</u> (voorkoms: 26; leerlinge: 14)

Leerlinge word verwar deur die numeriese grootte van getalle en laat die invloed van die teken buite rekening.

Die numeriese waarde en die werklike waarde van getalle moet verduidelik word (Formele logika en die vertikale getallelyn kan help).

ix) <u>Aftrekking word as kommutatief beskou</u> (voorkoms: 49; leerlinge: 31)

Hierdie fout in hulle denke spruit daaruit dat die leerling met die vertikale getallelyn werk en by die getal wat die laagste op die getallelyn lê wil begin reken, of omdat hulle nie ´n getal wat numeries groter as die aftrektal is, wil aftrek nie.

Hierdie wanbegrip kan met behulp van die patroonmatige strategie verduidelik word.

x) <u>Optel lewer altyd ´n positiewe antwoord</u> (voorkoms: 15; leerlinge: 3)

Hierdie leerlinge erken nie die invloed van gerigtheidstekens op die antwoord van ´n bewerking nie. Dit sal met praktiese inkledings (bv. termometer of skuld) geremedieer kan word.

xi) <u>+ ⁻a word beskou as nul</u> (voorkoms: 10; leerlinge 8)

Hierdie leerlinge verwar dit met die geval $a + {}^{-}a = 0$. ´n Verduideliking van optellingsinverse sal remediërend aangewend kan word.

xii) Getalle word beskou as vaste punte op die vertikale getallelyn (voorkoms: 1; leerlinge: 1)

Let wel dat in die geval van hierdie leerling, blootstelling aan die termometer en verskuiwings daarop haar nie tot beter insigte gebring het nie.

Analogie met positiewe getalle is die aangewese remediëring.

Uit bogenoemde is dit duidelik dat selfs die foutiewe strategieë heelwat moontlikhede bied vir aanknopingspunte met korrekte of remediërende strategieë. Die foutiewe strategieë impliseer ook in baie gevalle waardevolle gedeeltelik korrekte intuïsies oor negatiewe getalle.

Vir navorsers oor onderrigstrategieë vir die verwerwing van vaardighede in bewerkings met heelgetalle, word 'n telling van die aantal kinders wat 'n bepaalde korrekte strategie gebruik het, of dan 'n foutiewe strategie wat aanknoping verskaf vir die aanwending van die betrokke korrekte strategie, verskaf.

6.3.6 Aanbiedings of onderrigstrategieë waartoe die intuïsies wat by die 97 laerskoolleerlinge geïsoleer is, lei:

Die eerste getal verteenwoordig die aantal foutiewe gevalle waar die korrekte strategie kan aanknoop of remedieer en die tweede getal verteenwoordig die aantal leerlinge wat die strategie korrek aanwend .

i) Praktiese inkledinge.

* vertikale getallelyn

voorkoms : 121

leerlinge : 78

* skuld

voorkoms : 64

leerlinge : 1

ii) Formele logika (hoofsaaklik analogie, maar ook optellingsinverse, numeriese en werklike waarde, proses van aftrek, aftrekking van ´n negatiewe getal, is dieselfde as optelling van ´n positiewe getal en omgekeerd).

voorkoms : 137

leerlinge : 72 + 7 + 8 + 3 = 90

(iii) Patroonmatigheid.

voorkoms : 31

leerlinge : 5

6.4. <u>Inligting in verband met die volgorde waarin die twintig bewerkings op Taakkaart B1 gedoen is.</u>

Hieronder volg nou weer ´n voorbeeld van B1:

1. $5 - 8 =$
2. ${}^{-}8 - 3 =$
3. $7 - 7 =$
4. $7 + {}^{-}7 =$
5. $3 + {}^{-}5 =$
6. $5 + {}^{-}11 =$
7. $8 + {}^{-}5 =$
8. $10 + {}^{-}7 =$
9. $12 + {}^{-}7 =$
10. ${}^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 =$
11. ${}^{-}5 + {}^{-}3 =$
12. ${}^{-}3 + {}^{-}5 =$
13. $3 \times {}^{-}6 =$
14. ${}^{-}6 \times 3 =$
15. $5 - {}^{-}8 =$
16. ${}^{-}5 - {}^{-}2 =$
17. ${}^{-}8 - {}^{-}3 =$
18. ${}^{-}5 - {}^{-}8 =$
19. ${}^{-}7 - {}^{-}7 =$
20. ${}^{-}12 - {}^{-}4 =$

Die bewerkings is in bogenoemde volgorde aangebied, maar die leerlinge kon die verskillende gevalle in enige volgorde doen.

In die onderstaande tabel word aangedui in watter persentasie leerlinge ´n spesifieke geval in ´n spesifieke orde(plek) gedoen het. Die diagonaal toon die persentasie aan wat ´n betrokke bewerkingsvoorbeeld gedoen het in die orde waarin dit aangebied is

Tabel 14

	GEVALLE																			
ORDE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	42	11	5	1	2	1	2	2	0	1	5	2	0	1	1	1	5	4	6	6
2	6	20	10	4	0	3	1	4	3	3	4	5	3	1	2	7	3	4	5	10
3	32	25	21	3	1	0	2	1	1	6	1	0	0	0	3	2	0	1	1	0
4	4	10	9	26	2	8	2	1	5	3	5	2	3	5	1	2	6	2	2	0
5	1	7	9	12	25	0	4	3	2	3	4	3	7	3	4	4	2	2	2	1
6	2	3	4	9	9	19	2	2	3	3	3	9	4	3	4	6	3	2	3	5
7	3	2	7	4	10	10	19	3	0	1	5	3	4	3	3	4	5	6	3	3
8	0	8	6	6	3	11	11	22	5	6	1	2	0	2	2	3	3	3	3	1
9	0	2	6	5	6	5	8	11	23	3	3	3	2	1	2	3	3	4	4	4
10	2	1	1	4	3	7	4	7	5	22	5	0	5	4	4	2	4	5	5	8
11	0	2	2	3	5	2	5	3	12	7	21	1	7	9	6	1	4	5	2	1
12	1	1	3	4	4	2	5	6	4	7	5	23	3	9	6	4	1	6	4	0
13	1	1	2	2	4	4	6	8	4	3	8	8	20	2	6	2	3	3	5	6
14	1	1	4	3	3	6	2	1	11	6	2	10	7	20	2	5	4	2	3	5
15	0	1	1	2	3	1	3	5	6	6	4	2	8	8	20	5	2	5	10	6
16	1	2	1	2	4	7	3	6	1	8	8	4	3	8	9	23	4	1	2	1
17	1	0	1	3	2	2	6	4	4	3	4	8	6	7	7	8	24	3	3	1
18	0	0	1	0	1	0	2	1	4	1	2	3	7	4	6	10	9	23	8	17
19	0	1	1	3	3	4	4	6	2	3	6	4	4	5	5	4	9	11	19	4
20	2	1	4	2	8	6	6	2	3	3	2	6	5	3	5	2	4	6	8	20

Uit hierdie tabel is dit duidelik dat kinders neig om berekenings aan te pak in die volgorde waarin hulle gegee word.

Die enigste uitsondering is bewerkingsvoorbeeld 3: 7 - 7. Die verklaring is heel logies. Bewerkingsvoorbeeld 3 was in elk geval bo-aan die bladsy, met net bewerkingsvoorbeeld 1 en 2 bokant. Dus kon die leerling dit alreeds raaksien met die eerste oogopslag. Verder is bewerkingsvoorbeeld 3: 7 - 7 dan ook ´n bewerkingsvoorbeeld wat feitlik al die kinders korrek het (97%). Selfs in die konteks van die onderwerp, heelgetalrekenkunde, waar die negatiewe getalle vir die leerlinge onverkende veld is, kan daar min twyfel bestaan oor die antwoord van 7 - 7. Selfs leerlinge met ´n baie kreatiewe verbeelding, kan moeilik ´n slenterslag wat moontlik verskuil mag wees, optower. Dus was dit vir die meeste ´n veilige vertrekpunt.

Dit is dus duidelik dat die orde waarin bewerkings aangebied word, so ´n groot invloed het op die orde waarin leerlinge die bewerkings aanpak, dat die inligting só verkry, feitlik nie gebruik kan word om met ander inligting te vergelyk nie.

Indien bogenoemde inligting vir navorsingsdoeleindes gebruik wil word, sal die navorser beslis ´n ander metode moet gebruik.

In hierdie projek is die alternatiewe metode oorweeg om vir elke bewerkingsvoorbeeld ´n aparte taakkaartjie te maak en die kaartjies dan willekeurig rond en bont te pak. Hierdie metode is nie toegepas nie, omdat die leerling dan nie in een oogopslag al die kaartjies en hulle inhoud kon inneem nie en die keuse dan maar weer willekeurig word. Soos reeds gesê in hoofstuk 5, was geeneen van die leerlinge heeltemal konsekwent deur die verskillende bewerkinge van dieselfde aard direk na of naby mekaar te doen nie.

6.5 Slot:

Al sou hierdie hoofstuk net dien om opvoeders weer eens onder die besef te bring van die ongelooflike ryke geskakeerdheid van intuïsies wat leerlinge oor elke denkbare leerstofinhoud in die Wiskunde en andersins het, was hierdie verhandeling die moeite werd.

HOOFSTUK 7

´n VERSLAG OOR TWINTIG OPVOLGONDERHOUDE.

7.1 Inleiding

Na verloop van 6 maande, teen die einde van die 97 st.5-leerlinge se laerskoolloopbaan, word 20 van die onderhoude herhaal.

Die prosedure bly presies dieselfde.
Die onderhoudvoerder wil vasstel of daar enige noemenswaardige ryping in intuïsies plaasgevind het.

7.2 ´n Verslag van die veranderinge, verskille of gehandhaafde intuïsies by die 20 leerlinge

a) Donovan (12 : 9)

Taakkaart A

Eerste onderhoud: $4 - 9 = 5$

Na Taakkaart B3 : Is $4 - 9 = 9 - 4$? sê hy:

Jy kan nie 4 van 9 aftrek nie, want $4 < 9$.

Tweede onderhoud: $4 - 9 = {}^{-}5$

$4 < 9$. As jy van 9 af 5 terugtel, kom jy by 4 uit.

Hierdie antwoord, wat die toetsmetode verteenwoordig, is betekenisvol, want in die eerste onderhoud was die mees opmerklike strategie juis die toetsmetode wat by bewerkingsvoorbeelde (2) en (20) op Taakkaart B1 gebruik is.

Taakkaart B1

Hy gebruik ook die toetsmetode in die tweede onderhoud, maar wel by bewerkingsvoorbeeld 1 : 5 - 8 = ⁻3, *'n Mens kan nie die groot getal van die kleintjie aftrek nie, toe vat ek ⁻3 en plus dit by 5, dan's dit 8.*

(Dit is duidelik dat die toetsmetode nie korrek toegepas word nie, maar dit is 'n **intuïsie** waarby onderrig kan aanknoop.)

b) Tish (13 : 2)

Taakkaart A:

Sy hanteer 4 - 9 in beide onderhoude korrek.

Taakkaart B1:

Haar strategie met die hoogste frekwensie is die vertikale getallelyn. Sy werk tot by nul; d.w.s. maak een van die getalle eers nul en dan verder.

Dit pas sy konsekwent in die tweede onderhoud ook toe.

c) Terry (13 : 10)

Taakkaart A:

In beide onderhoude sê sy dat die bewerking 4 - 9 nie gedoen kan word nie.

Taakkaart B1

Eerste onderhoud: Sy ignoreer die negatiewe tekens van die getalle konsekwent.

Tweede onderhoud: Sy ignoreer die negatiewe tekens van die getalle en doen die bewerking, maar sit dan ´n negatiewe teken by die antwoord.

d) Soekie (12 ; 9)

Taakkaart A:

Eerste onderhoud: $4 - 9 = {}^{-}9$. Sy sê: *Jy kan nie 9 van 4 aftrek nie, daarom is dit ⁻9.*

Sy dink dat ´n geval van die aard $a - b;\ b > a$, hanteer word deur die tweede getal van ´n minusteken te voorsien en dan as antwoord neer te skryf.

Tweede onderhoud: $4 - 9 = {}^{-}5$

e) Andrie (12 ; 9)

Taakkaart B1:

In beide onderhoude gebruik hy alle tekens as bewerkings-tekens, maar sy prosedure verskil:

Eerste onderhoud: Bewerkingsvoorbeeld 9: $12 + {}^{-}7 = 7$

7 + 7 = 14 en 14 - 12 = 2.

Tweede onderhoud; $12 + {}^{-}7 = 12$

12 + 7 - 7 = 12

f) Carla (12 : 9)

Taakkaart A:

Eerste onderhoud: 4 - 9 = *kan nie.*

Jy kan nie 9 van 4 aftrek nie.

Tweede onderhoud: 4 - 9 = 0.

Jy kan nie 9 van 4 aftrek nie.

Taakkaart C2 (Termometervel)

Sy kon in geeneen van die onderhoude verskuiwings op die termometer regkry nie, maar dan kom dit voor dat sy in beide onderhoude goed vaar met Taakkaart B1 en oënskynlik van die vertikale getallelyn gebruik maak in bewerkingsvoorbeeld 6: $5 + {}^{-}11 = {}^{-}6$

Ek het 5 gevat en 11 afgetrek.

g) <u>Grietjie (12 : 0)</u>

<u>Taakkaart C2:</u>

In geeneen van die twee onderhoude kan sy verskuiwings op die termometer doen nie.

<u>Taakkaart B1</u>

Sy is die enigste leerling wat nie kans sien om die bewerkings te doen nie, nie in een van die twee onderhoude nie.

In die <u>eerste onderhoud</u> probeer sy bewerkingsvoorbeeld 3 : *7 − 7 = 0* en bewerkingsvoorbeeld 4 : *7 + −7 =*
Ek het 7 bo vriespunt (wys met vinger) *en ek moet 7 onder vriespunt* (wys met vinger) *daarby tel. Ek weet nie hoe dit werk nie.*

Dit is dan die leerling wat $^{+}7$ en $^{-}7$ as vaste punte op die vertikale getallelyn (termometer) beskou en nie daarmee kan werk nie.

In die <u>tweede onderhoud</u> probeer sy bewerkingsvoorbeeld 9 : 12 + $^{-}7$ = *19* en bewerkingsvoorbeeld 3 : *7 − 7 = 0*
Dan vra sy: *Wat se strepies is dit?* Sy wys na die minustekens van die getalle. Sy staak.

Interessantheidshalwe kan genoem word dat die betrokke leerling besonder jonk is, nl. 12 jaar 0 maande in Mei van haar st.5-jaar, maar ses maande later toe sy 12 jaar 6 maande oud is (min of meer die ouderdom van baie van haar maats met die eerste onderhoude) weier sy nog steeds om met die negatiewe getalle bewerkings te doen.

h) Kosie (14 : 6)

In die eerste onderhoud doen hy alle gevalle waar die aftrekker numeries groter is as die aftrektal, bv.

$^{-}5 - {}^{-}8$ as:

$^{-}5 - {}^{-}8 =$ *kan nie.*

In die tweede onderhoud:

$^{-}5 - {}^{-}8 = 0$

i) Karel (13 : 1)

Taakkaart B1:

Hy pas analogie met positiewe getalle toe in die eerste onderhoud. Die suiwerste voorbeeld daarvan is:

Bewerkingsvoorbeeld 18: $^{-}5 - {}^{-}8 = -{}^{-}3$

In die tweede onderhoud werk hy met verwronge reëls:

$^{+} + {}^{-} = -$

$^{-} + {}^{-} = +$

Hy verduidelik dat hy sy pa gevra het na die eerste onderhoud en dat hy so van die reëls te hore gekom het.

Soos tipies die geval wanneer kinders reëls ken wat hulle probeer toepas, doof dit alle ander intuïsies uit.

j) <u>Ria (12 :8)</u>

<u>Taakkaart C2 (Termometerkaart)</u>

Sy vaar beide kere swak hier, maar die swakste in die tweede onderhoud waar sy sê: *Die kwik sal nie verder as nul gaan nie. Onder nul word dit warmer.*

k) <u>Pietjan (12 : 8)</u>

Gedurende beide onderhoude is dit duidelik dat hy temperatuurverskuiwings as ´n spesifieke "*soort som*" beskou en die bewerkings op Taakkaart B1 as ander "*soort somme.*"

In beide onderhoude, nadat hy by Taakkaart B1 gevra het of dit grade C is, (Onderhoudvoerder: *Dit kan wees.*), voeg hy konsekwent grade C by al sy antwoorde.

Die geval $a + {}^{-}b$; bv. $10 + -7$ doen hy korrek in die eerste onderhoud, maar ignoreer die negatiewe teken van 7 in die tweede onderhoud.

l) <u>Wennie (13 : 8):</u>

<u>Taakkaart A.</u>

<u>Eerste onderhoud:</u> Hy toon baie goeie insig:

$4 - 9 = -5$

$4 - 4 = 0$; $0 - 5 = -5$

Tweede onderhoud:

4 - 9 = 0,5

Dis mos onder nul.

Hierdie desimale breuk as aanduider dat die antwoord kleiner as nul is, gebruik hy regdeur by Taakkaart B1 ook. Sy strategieë bly egter dieselfde.

m) Charlotta (12 : 11)

Taakkaart A:

In beide onderhoude:

4 - 9 = 9 - 4

Taakkaart C2:

Sy doen die verskuiwings in beide onderhoude korrek.

Taakkaart B1

Daar vind beslis vordering plaas vanaf die eerste na die tweede onderhoud.

Gedurende die eerste onderhoud ignoreer sy al die negatiewe tekens van die getalle.

Gedurende die tweede onderhoud gebruik sy egter die vertikale getallelyn (termometer) as denkhulpmiddel en erken dus in sommige gevalle die negatiewe tekens van die getalle as sulks.

n) Ryno (12 : 7)

Na 'n antwoord: *onmoontlik* vir 4 - 9 op Taakkaart A gedurende beide onderhoude, herken hy skynbaar die implisiete patroon op Taakkaart B2 gedurende die tweede onderhoud en sê:

$$4 - 5 = {}^{-}1.$$

Taakkaart B1

Gedurende die eerste onderhoud na Taakkaart C2 (termometer) sê hy dat die bewerkings slegs gedoen kan word as dit grade is en gebruik dus die vertikale getallelyn as denkhulpmiddel.

Taakkaart C2 word nie gedoen in die tweede onderhoud nie. Hy doen die bewerkings geredelik en gebruik ook die vertikale getallelyn as denkhulpmiddel.

o) Hugo (13 : 8):

Hy kan nie verskuiwings op die termometer doen nie.

Taakkaart B1

Gedurende beide onderhoude skryf hy *kan nie* vir al die bewerkings, maar in die eerste onderhoud doen hy wel die geval ${}^{-}a - {}^{-}b$; $a > b$. bv. ${}^{-}12 - {}^{-}4$. Hy sê: *As al die tekens negatief is, kan die som gedoen word.*

p) <u>Lientjie (13 : 4)</u>

<u>Taakkaart B1</u>

Sy werk geredelik met die negatiewe getalle in bewerkings.

In die tweede onderhoud sê sy egter die gevalle a + $^{-}$b; a > b bv. 12 + $^{-}$7 *is onmoontlik, want jy kan nie 'n minusgetal by 'n heelgetal tel nie.*

q) <u>Andriëtte (13 : 6)</u>

<u>Taakkaart B1</u>

In die eerste onderhoud vra sy die termometerkaart aan om op te tel.

In die tweede onderhoud gebruik sy bloot die vertikale getallelyn intuïtief.

r) <u>Juan (13 : 7):</u>

<u>Taakkaart A:</u>

<u>Eerste onderhoud:</u> 4 - 9 = *onmoontlik, Jy kan nie 9 appels weggee as jy 4 het nie.*

<u>Tweede onderhoud:</u> 4 - 9 = $^{-}$5

4 - 4 = 0 en dan gaan jy onder die lyn.

s) Henry (13 : 2)

Taakkaart B1

Gedurende beide onderhoude gebruik hy konsekwent analogie en die vertikale getallelyn.

Hy konsentreer sterk op die bewerkingsteken om die rigting van beweging op die vertikale getallelyn aan te dui en vergeet in sommige gevalle (gedurende beide onderhoude) om die getalle se tekens in ag te neem.

t) Danie (12 : 11):

Taakkaart B1

Gedurende beide onderhoude verduidelik hy sy antwoorde in al 20 bewerkingsvoorbeelde konsekwent aan die hand van die skuld-idee.

Gedurende beide onderhoude interpreteer hy bewerkingsvoorbeeld 15 verkeerd:

$5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$ *Jy skuld R5 . . . .*

9.3 Samevatting:

Daar kan geen algemene tendens t.o.v. verandering of vordering bespeur word nie.

Met enkele uitsonderings hanteer die leerlinge die bewerkings in beide onderhoude in terme van dieselfde rekenstrategieë as gevolg van dieselfde intuïsies.

HOOFSTUK 8.

'n KRITIESE BESKOUING VAN DIE PERSOONLIKE ONDERHOUD.

8.1. Inleiding:

Daar moet aanvaar word dat daar baie parameters teenwoordig is in so 'n ondersoek, aangesien die mens so kompleks en veranderlik is en as sulks dan, in die besonder die geestesprosesse van die mens, wat hier onder die loep kom.

Beide onderhoudvoerder en toetsling is onderworpe aan 'n magdom invloede wat van buite op hulle inwerk en elk ook slaaf van sy reaksie daarop.

Feit bly egter dat in 'n protokolmetode soos hierdie, wat uiteengesit is in Hoofstuk 2, hierdie wye veld van unieke menslike verskeidenheid juis daartoe meewerk om die volle spektrum van menslike kognitiewe prosesse te probeer dek.

Waar die navorser in hierdie ondersoek geïnteresseerd is in die verskeidenheid intuïsies wat by leerlinge (sts.6 en 5) bestaan ten opsigte van heelgetalrekenkunde, is die standaardsituasie as sulks nie so belangrik nie. Dit is net belangrik dat dieselfde tipe inligting verstrek word in die loop van die onderhoud, sodat elke leerling ʼn gelyke kans daarop het dat sy besondere intuïsies na vore sal kom.

8.2. Taakkaart B3

Die redes vir die verwydering van hierdie taakkaart is reeds bespreek. Daar bestaan egter geen statistiese bewys dat leerlinge wat dan bevestigend antwoord op die vraag by B3:

Is 9 - 4 = 4 - 9 ?

tog wel geskik is vir die doeleindes van die ondersoek nie, want Taakkaart B3 het ʼn hek bevat en onderhoude waar toetslinge bevestigend geantwoord het, is gestaak. Daarna is daar weggedoen met hierdie taakkaart.

8.3. Taakkaart B2

Hierdie taakkaart poog deur patroonmatigheid om die leerling te lei tot die korrekte antwoord op 4 - 5, dit wil sê om hom te dwing om die bestaan van getalle kleiner as nul te erken en hulle dan as bewerkingsgetalle aan te wend.

Geen leerling wat ʼn foutiewe antwoord op 4 - 9 gehad het, kon tot beter insigte gelei word deur taakkaart B2 nie.

Daar kan twee redes daarvoor wees:

* die kinders is nie bevatlik vir die patroonmatigheid nie, d.w.s. die patroon is te subtiel, of

* hulle sien wel die patroon in, maar vasgelegde begrippe soos:

  # *jy kan nie ´n groot getal van ´n kleintjie aftrek nie* (as hulle dus na 4 - 5 kyk, sien hulle bogenoemde *probleem* raak en nie 4 - 5 as deel van die probleem nie).

  # *nul is die kleinste getal wat ons kry*, verhoed hulle om die intuïtiewe logiese antwoord neer te skryf.

Daarby moet ons voeg dat die leerling dalk bloot nie weet $^{-}1$ is een minder as nul nie.

Dit blyk dus dat B2 ´n oorbodige taakkaart in die ondersoek was, alhoewel dit waardevolle implisiete moontlikhede bevat.

8.4 Taakkaart C2

Die volgende gebreke word waargeneem by C2: Op die afbeelding van die termometer

* die 0 grade is nie reg in die middel van die afbeelding nie en dit blyk asof dit sommige leerlinge verwar.

* die termometer as meetinstrument is skynbaar nie so ´n vertroude instrument as wat die onderhoudvoerders veronderstel het nie. Daar is leerlinge wat selfs nadat dit in breë trekke aan hulle verduidelik is, nog steeds nie die werking daarvan verstaan nie en dus nie die verskuiwings kan doen nie. Hulle doen al die verskuiwings op die termometer verkeerd, maar doen net daarna presies dieselfde tipe probleem by B1 korrek.

Dit mag dus wees dat vir leerlinge wat die termometer nie begryp nie, die denkhulpmiddel eerder ´n verduisterende effek het op die bewerkinge wat hulle moet doen, want hulle redeneer skynbaar dat alle sulke bewerkinge soos verskuiwings op die termometer gedoen moet word.

* Daar kan verdere verwarring ontstaan, want die onderhoudvoerder sê: *Dit is 4 grade C en dit raak 2 grade kouer, maar skryf 4 - 2 =*
Die kind hoor egter die grade C en besef nie dat die notasiewyse die sprong maak na die algemene geval nie. Hy dink die grade C is net uitgelaat.
Nou dink hy dat by B1 die grade C ook net uitgelaat is en hy voeg dit dan weer in sy antwoord by, of:
Hy dink die termometerbewerkings is spesifieke soort bewerkings wat op ´n eiesoortige wyse gedoen word en

dat die beginsels wat toegepas is by C2 nie sommer ook op ander somme toegepas kan word nie.

Pietjan het met behulp van ´n praktiese denkhulpmiddel by Taakkaart A verduidelik waarom 4 - 9 nie gedoen kan word nie:

As jy 4 albasters het, kan jy nie 9 weggee nie, maar by C1 vra hy of dit grade C is of doodgewoonweg. In sy verduideliking by C1, sê hy dan:

As dit grade C is, dan ....

* Die waarde van die termometerkaart lê daarin dat dit negatiewe getalle bekendstel en suggereer dat dit bewerkingsmoontlikhede inhou.

* Of daar wel meriete daarin is om die termometervel te doen, is kontensieus.

i) Op twee of drie leerlinge na, maak almal van intuïtiewe logika en analogieë gebruik.

ii) Leerlinge wil óf alles herlei na grade C, of hulle vergeet daarvan en sê 5 - 8 = *onmoontlik*.

iii) Die termometer is ´n gebrekkige denkhulpmiddel, want dit maak nie voorsiening vir die bewerkingsgevalle:

$$a + {}^{-}b$$

$$^{-}a - {}^{-}b$$

$$a - {}^{-}b \text{ nie.}$$

Die vraagteken oor die termometer moet in ´n breër kader geplaas word, nl.

´n Besinning oor die wensilkheid van denkhulpmiddels wanneer die konsep van negatiewe getalle bekendgestel word.

8.5. Taakkaart C1.

Taakkaart C1 blyk ´n waardevolle vel te wees, alhoewel op die ou end nie om dieselfde rede as wat dit aanvanklik ingesluit is nie.

Hierdie taakkaat sou die onderhoudvoerder in staat stel om te bepaal of die leerling vanaf die praktiese hulpmiddel wat aan hom bekend gestel is, kan abstraheer om dus die negatiewe getal as ´n bewerkingsgetal in alle gevalle te aanvaar.

Daar word aanvaar dat leerlinge wat die korrekte antwoord by C1 verskaf, wel geabstraheer het, maar dit mag egter ook wees dat hulle verkeerde voorveronderstellinge het wat hulle net nie lug nie.

Leerlinge vra dikwels:

Is dit nou ook daai grade?

Tesame met die hantering van B1, laat dit die vermoede ontstaan dat hulle verskuiwings op die termometer as ´n spesifieke soort bewerking beskou. Hulle sien nie raak dat die termometer 'n denkhulpmiddel is nie, selfs al gebruik hulle self praktiewe voorbeelde by A om hulle antwoorde te verduidelik.

Indien die kind by C1 spontaan antwoord dat 4 - 6 en 4 - 9 onmoontlik is, vra die onderhoudvoerder:

En as jy aan die termometer dink?

Dan verskaf hulle gewoonlik die verlangde antwoord.

Later word besef dat hierdie vraag verkeerde begrippe by die kind kon laat ontstaan:

* Die kind kan reken dat hy alle bewerkinge met heelgetalle moet terugvoer na die termometer en temperatuurveranderinge, met ander woorde die implikasie kan wees: Negatiewe getalle verteenwoordig altyd temperatuursverskuiwings.

* Die termometer en temperatuursverskuiwings is 'n spesifieke soort *bewerking* wat op 'n spesifieke manier gedoen word en dit staan los van *gewone bewerkings* bv.: soos 5 - 8.

Daar is gepoog om verkeerde voorveronderstellinge en instellings die nek in te slaan by C1 voordat hulle B1 doen, maar in die proses kon ernstiger wanopvattings geskep word. Daar bestaan vrees dat waardevolle inligting verlore gaan, maar in effek is dit slegs een voorbeeld; a - b; b > a, wat direk geraak word by B1.

Dit is dus nie die moeite werd om denkhulpmiddels te gebruik wat ander wanopvattings tot gevolg kan hê nie.

8.6. Taakkaart B1

Na die eerste 40 onderhoude is die leerlinge aangemoedig om die bewerkinge by B1 volgens hul eie volgorde af te handel. Die bewerkinge op B1 is van maklik na moeilik gerangskik, volgens die resultate van die skriftelike toetse met hoërskoolleerlinge, soos deur Murray bepaal.

Die volgorde waarin leerlinge sou verkies om die berekeninge te doen, sou hopelik inligting oor die volgende vrae verskaf:

* Watter volgorde is die voorkeurvolgorde van die leerlinge?
* Herken hulle die verskillende bewerkings wat dieselfde geval verteenwoordig?
* Stimuleer ´n vrye keuse dalk onafhanklike denke?

i) Die volgorde wat die leerlinge kies, is nie baie betroubaar nie, want hulle sien dalk nie die bewerkings wat dieselfde geval verteenwoordig in een oogopslag raak nie. Dit is dus nie te se dat hulle dit nie as dieselfde geval herken nie.

ii) Verder kan hulle nou makliker van strategie verwissel sonder dat hulle dit ´n probleem vind, want hulle doen nou ´n voorbeeld van een geval en eers weer vyf bewerkings later nog een.

iii) Waar leerlinge die bewerkinge in die gegewe volgorde moet doen, word hulle tot ´n mate gedwing om in te sien dat hulle nou te doen het met dieselfde geval en hulle kan dus nie sonder gewetenswroeging van strategie verander nie.

iv) Die feit dat daar verskillende getalle gebruik word, sus ook hul gewete, want nou kan hulle sonder ´n tweede gedagte skryf:

$$3 + {}^{-}5 = +2 \text{ en}$$

$$^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}3$$

sonder dat hulle agterkom dat hulle dieselfde rekenstrategie gebruik het vir twee verskillende gevalle.

v) ´n Alternatiewe werkswyse sou wees om hierdie taakkaart so te struktureer dat leerlinge nog sterker aanmoediging kry om logiese afleidings in terme van onderlinge ooreenkomste en verskille tussen die verskillende gevalle te maak. Dit sou kon geskied deur slegs dieselfde twee getalle met verskillende tekens, waar van pas, vir al die gevalle te gebruik. (Dit sou natuurlik impliseer dat daar slegs een berekening per geval kan wees, met die nadele hieraan verbonde.)

Dieselfde getalle is in drie gevalle gebruik: $5 - 8$; $5 - {}^{-}8$; $^{-}5 - {}^{-}8$ en die verwagte reaksie is ondervind.

vi) Teenoor wat in v) voorgestel is, moet die volgende egter in ag geneem word:
Omdat die leerlinge in baie gevalle swak formuleer en dan nie die prosedure wat hulle gebruik het, verstaanbaar verduidelik nie, het die paar voorbeelde van dieselfde bewerkingsgeval en ook die feit dat die leerlinge nie al die voorbeelde van die bewerkingsgeval direk na mekaar doen en dus feitlik woordeliks dieselfde verduideliking aanbied nie, die onderhoudvoerder gehelp om hulle rekenstrategieë te kan identifiseer.

vii) ´n Verdere gebrek is dat vir die bewerkingsgeval $a - {}^-b$, net ´n voorbeeld met $a < b$ ingesluit is. $a - {}^-b$, $a > b$ kon nog inligting beskikbaar gestel het, want die leerlinge skram onwillekeurig weg van die tipe probleem waar $5 < 8$ is, want hulle is slagoffers van die onderrigstrategie wat aan hulle voorhou dat $a - b$; $b > a$ *onmoontlik* is.

Die feit dat $5 - 8$ gebruik is hou ´n verdere nadeel in. Nou plaas die kind $5 - {}^-8$ en ${}^-5 - {}^-8$ onmiddellik in die kategorie van $5 - 8$ sonder om sy logika ´n kans te gee. (Dit is nou die kinders wat volhou $5 - 8$ is *onmoontlik*).

Die hele samestelling van Taakkaart B1 sal baie mooi herdink moet word.

8.7 Taakkaart D.

Die bewerkingsgevalle a x ¯b en ¯a x b oorvleuel met die voorbeelde van B1.

¯a x ¯b is waardevol, want:

* Die termometer bied nie hier ´n uitkoms nie.

* Dieselfde getalle word vir al drie voorbeelde gebruik, dus moet hulle raaksien dat daar ´n verskil tussen eersgenoemde twee en die laaste een is. Dit is dan ook ´n probleem vir die leerling met goeie insig.

* Sommige leerlinge voel aan ¯4 x ¯5 moet ´n positiewe antwoord gee, maar niemand kon ´n bevredigende rede daarvoor verskaf nie.

8.8. Gevolgtrekking

Alhoewel daar ruimte vir verbetering is, laat die taakkaarte ´n mens tog ´n kykie kry in vele fasette van die denkwêreld van die leerling en skerp ´n mens op om sensitief te wees vir strategieë wat vir hulle bevatlik is.

HOOFSTUK 9:

SLOTSOM

9.1 Inleiding

Aan die einde van baie statistieke, interpretasies en afleidings, sou 'n mens met reg kon vra of dit die moeite werd was, maar beskou teen die agtergrond van die gees waarin hierdie verhandeling geskryf is, naamlik die unieke aard van elke leerling, sou selfs die mees ongenaakbare kritikus weer eens moet kennis neem van die volgende:

9.2 Gebreke in die mondering waarmee sts.7-, 8- en 9-leerlinge heelgetalrekenkunde aandurf:

Leerlinge se gebrekkige hantering van sommige bewerkingsgevalle met negatiewe getalle, toon aan dat werklike leer nie gedurende die onderrigsessies plaasgevind het nie.

Dit impliseer dus dat die onderrigstrategieë by heelgetalrekenkunde krities geëvalueer behoort te word.

9.3 Ryke skakerings van intuïsies betreffende die bewerkings met negatiewe heelgetalle bestaan reeds by st.5-leerlinge:

Die meeste st.5-leerlinge het spesifieke idees oor hoe om bewerkings met negatiewe heelgetalle aan te pak. Al sou die intuïsie lei tot ´n verkeerde poging om ´n bewerking te hanteer, verskaf dit in die meeste gevalle ´n aanknopingspunt om ´n korrekte metode te inisieer.

9.4 Standerd 5-leerlinge funksioneer op ´n hoë vlak van formele denke in hul hantering van heelgetalrekenkunde:

Alhoewel ´n denkhulpmiddel (die termometer) aan hulle voorgehou is, was hulle tog gereed om die bewerkings wat nie deur ´n termometer geakkommodeer kan word nie, aan te pak. Slegs een leerling het uit sy eie die konkrete denkhulpmiddel, skuld, ingevoer.

9.5 Intuïtief-maklike bewerkingsgevalle word deur leerlinge na formele onderrig as moeilik hanteer:

Dit is die mees kritiese afleiding van hierdie ondersoek. Dit skyn dat as leerlinge eers aan konkrete en semi-konkrete hulpmiddels en reëls bekendgestel is, die intuïsies wat hulle oor heelgetalrekenkunde mog koester, verdring word.

9.6 <u>Intuïtief-maklike gevalle word getransformeer na moeiliker gevalle</u>:

Omdat bewerkingsgevalle waar die tweede getal ´n negatiewe getal is, verander word tot ´n bewerking met die tweede getal ´n positiewe getal, deur die vermenigvuldigingsreëls, bv. $^-9 - {}^-5 = {}^-9 + 5$, kan die leerlinge bogenoemde voorbeeld nie hanteer as die verskil tussen twee negatiewe getalle nie, waartoe hy wel spontaan in staat kan wees.

9.7 <u>Leerlinge is dikwels slagoffers van die oorvereenvoudiging van leerstof deur volwassenes, wat dan effektiewe leer kniehalter</u>:

St.5-leerlinge ly onder bv. *jy kan nie ´n groot getal van ´n kleintjie aftrek nie* en dit bots met hul intuïsies oor heelgetalrekenkunde.

9.8 <u>Onderwysers moet hulle vergewis van intuïsies wat leerlinge koester voordat daar op ´n onderwysstrategie besluit word</u>:

Waardevolle teelaarde vir ware wiskundige begrip en leer lê braak en word onvrugbaar, terwyl denkhulpmiddels en y reëls deur volwassenes gefabriseer, opgedis word, sonder die verlangde sukses.

9.9 Slot

As dit dan waar is betreffende heelgetalrekenkunde, is die implikasies skrikaanjaend vir ons hele onderwysstelsel en die toekoms van ons kinders.

B Y L A E S

BYLAE A

(Skriftelike Toets)

Gebruik asseblief deurgaans 'n balpuntpen.
Please use a ballpoint pen for all writing.

1		

Naam:
Name: ----------------------------------

4		

Standerd:
Standard: ----------------------------------

7 ☐

8
A/E ☐

9 10	11 12	9	10	11	12
$^{-}3 + {}^{-}5 =$	$5 + {}^{-}2 =$				
$^{-}4 + 6 =$	$3 + {}^{-}5 =$				
$^{-}9 - {}^{-}4 =$	$^{-}5 - {}^{-}9 =$				
$5 - 7 =$	$^{-}7 - 3 =$				
$7 - {}^{-}5 =$	$5 \times {}^{-}4 =$				
$^{-}5 \times 4 =$	$^{-}3 \times {}^{-}7 =$				
$^{-}4 + {}^{-}2 =$	$7 + {}^{-}3 =$				
$^{-}3 + 5 =$	$5 + {}^{-}7 =$				
$^{-}6 - {}^{-}2 =$	$^{-}7 - {}^{-}3 =$				
$3 - 7 =$	$^{-}6 - 2 =$				
$5 - {}^{-}2 =$	$3 \times {}^{-}6 =$				
$^{-}3 \times 6 =$	$^{-}4 \times {}^{-}5 =$				
$^{-}6 + {}^{-}3 =$	$3 + {}^{-}1 =$				
$^{-}2 + 4 =$	$4 + {}^{-}6 =$				
$^{-}7 - {}^{-}1 =$	$^{-}3 - {}^{-}6 =$				
$2 - 5 =$	$^{-}5 - 3 =$				
$6 - {}^{-}4 =$	$3 \times {}^{-}4 =$				
$^{-}3 \times 4 =$	$^{-}4 \times {}^{-}3 =$				

BYLAE B

(Onderhoudstaakkaarte)

DATUM:

NAAM:

STANDERD:

SKOOL:

LAERSKOOL:

OUDERDOM:

A

Hoeveel is:

1) 8 - 5 =

2) 12 - 7 =

3) 4 + 5 =

4) 4 - 9 =

1) $5 - 8 =$

2) $^{-}8 - 3 =$

3) $7 - 7 =$

4) $7 + {}^{-}7 =$

5) $3 + {}^{-}5 =$

6) $5 + {}^{-}11 =$

7) $8 + {}^{-}5 =$

8) $10 + {}^{-}7 =$

9) $12 + {}^{-}7 =$

10) $^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4 =$

11) $^{-}5 + {}^{-}3 =$

12) $^{-}3 + {}^{-}5 =$

13) $3 \times {}^{-}6 =$

14) $^{-}6 \times 3 =$

15) $5 - {}^{-}8 =$

16) $^{-}5 - {}^{-}2 =$

17) $^{-}8 - {}^{-}3 =$

18) $^{-}5 - {}^{-}8 =$

19) $^{-}7 - {}^{-}7 =$

20) $^{-}12 - {}^{-}4 =$

B_2

1) $4 - 1 =$

2) $4 - 2 =$

3) $4 - 3 =$

4) $4 - 4 =$

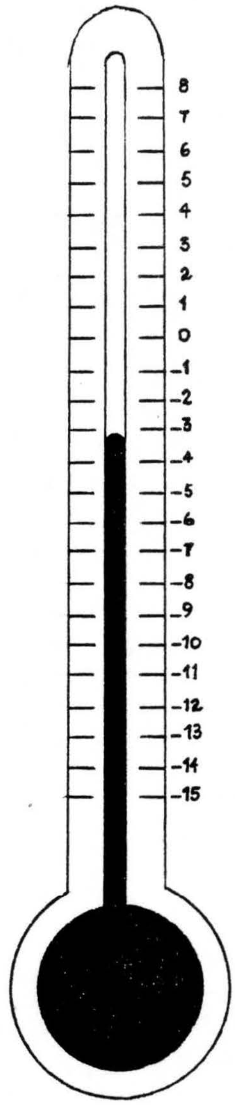
5) $4 - 5 =$

$$9 - 4 =$$

Is $9 - 4 = 4 - 9$?

4 - 6

4 - 9



As dit -3° is, en dit word nog 5° kouer, wat is die temperatuur dan?

D

1) $5 \times {}^{-}4 =$

2) ${}^{-}4 \times 5 =$

3) ${}^{-}4 \times {}^{-}5 =$

BYLAE TOT HOOFSTUK 6

(Besondere voorbeelde van gevorderde vlakke van formele logika en gesofistikeerde intuïsies of bloot interessanthede)

BYLAE TOT HOOFSTUK 6.

BESONDERE VOORBEELDE VAN GEVORDERDE VLAKKE VAN FORMELE LOGIKA EN GESOFISTIKEERDE INTUïSIES OF BLOOT INTERESSANTHEDE.

Hannaleen (12 : 9)

Hannaleen doen bewerkingsvoorbeeld 2: $^{-}8 - 3$ tiende. Sy vra dan of sy die termometervel by haar mag hou. Sy tel vir die oorblywende 10 bewerkingsvoorbeelde getrou op die termometer.

Vir die bewerkingsvoorbeelde 16 : $^{-}5 - {}^{-}2 = {}^{-}7$

20 : $^{-}12 - {}^{-}4 = {}^{-}16$

huiwer en wik en weeg sy lank voor sy wel afbeweeg.

Sy doen bewerkingsvoorbeeld 17 net na bewerkingsvoorbeeld 16:

$$^{-}8 - {}^{-}3 = {}^{-}5$$

Sy beweeg sonder om verder te huiwer, maar kan nie sê hoekom sy dit doen nie. Sy sê: *Dis $^{-}8$ en ek moet 3 opbeweeg.* Dit kan analogiese redenering verteenwoordig as sy sou redeneer:

$^{-}8 - 3 = {}^{-}11$. *Ek het dus afbeweeg, daarom moet ek opbeweeg by $^{-}8 - {}^{-}3$.*

Sy doen dan laaste bewerkingsvoorbeeld 18 :

$^{-}5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$

$^{-}5$ minus minus 8. Ek gaan 3 laer, dan's dit $^{-}8$.

en bewerkingsvoorbeeld 15:

$5 - {}^{-}8 = {}^{-}13$

5 - $^{-}8$; $^{-}8$ gaan nog 5 laer, toe's dit $^{-}13$.

Hier het ons 'n baie goeie voorbeeld van 'n intuïtiewe aanvoeling wat 'n leerling nie onder woorde kan bring nie, maar wat tog manifesteer in hul pogings om bewerkings met negatiewe getalle te doen. In bewerkingsvoorbeeld 15 het Hannaleen intuïtief **op** beweeg, op 'n denkbeeldige vertikale getallelyn, maar toe sy moes verduidelik, raak sy verward. Hier het die intuïsie egter geseëvier.

<u>Christian (13 : 2)</u>

Eric vorder binne die verloop van die onderhoud vanaf die mees infantiele antwoord, nl. vir Taakkaart A nr. (4) 4 - 9 = 5, tot gevorderde formele logika by Taakkaart B1 nr. 18:

$^{-}5 - {}^{-}8 = 3$ grade C

Dis $^{-}5$ grade C. $^{-}8$ is groter as $^{-}5$ en hy sal na die hoër een gaan wat nie minus is nie.

Nadat Taakkaart C2 (termometerkaart) gedoen is, hou Christian konsekwent by die grade C in sy antwoorde. As na die vlak van formele logika gekyk word in sy verduideliking van bewerkingsvoorbeeld 18, wonder ´n mens wat hy met bewerkingsvoorbeeld 15: $5 - {}^{-}8$ sou doen as hy nie gepreokkupeerd met die vertikale getallelyn (termometer) was nie.

Hy sê : *$5 - {}^{-}8 = {}^{-}3$ grade C. Dis 5 grade C - 8 grade C.*

Sy antwoord op bewerkingsvoorbeeld 2 :

$${}^{-}8 - 3 = {}^{-}5 \textit{ grade } C$$

bevestig die vermoede dat hy ´n grootte-orde probleem het.

Die konsekwentheid waarmee hy grade C inbring al gebruik hy ander strategieë en die duidelike tekens van formele logika wat telkens na die oppervlak beur, bevestig dat praktiese inkledings ´n steurende effek op die gang van die kind se intuïtiewe logika kan hê.

<u>Frans (12 : 10)</u>

Frans openbaar ook gevorderde formele logika, maar raak weer verward met eenvoudiger voorbeelde. Dit lyk dus dat hy by die onortodokse gevalle waar hy bloot op sy intuïtiewe reserwes moet staatmaak, beter vaar as by die gevalle wat meer bekend lyk. Frans het al die verskuiwings op Taakkaart C2 (termometerkaart) gedoen sonder om hoegenaamd die afbeelding te raadpleeg. Hy het Taakkaart A nr.4 reeds korrek gehad, met die volgende redes:

$4 - 9 = {}^{-}5.$

4 - 9 = ⁻5: 9 - 4 = 5 en dus is

4 - 9 = ⁻5

Hy doen bewerkingsvoorbeeld 4 : $7 + {}^{-}7 = 0$. *7 geplus met ⁻7 ; 7 minder as nul plus 7*, eerste.

Tweedens doen hy dan bewerkingsvoorbeeld 8:

$10 + {}^{-}7 = 3.$

10 is 3 meer as 7, 7 minder as nul.

Hierdie verduideliking dui op die begryping van die proses van aftrek by ´n bewerking van ´n positiewe en negatiewe getal.

Agste doen hy bewerkingsvoorbeeld 9 wat dieselfde geval verteenwoordig:

$12 + {}^{-}7 = {}^{-}19$

12 + 2 = 14. Ek weet nie waar kry ek die 2 nie. Nee, dis:

12 + 7 = 19 en dis ⁻7, daarom ⁻19

Nou het hy regresseer na verskeie foutiewe strategieë en dit nadat bewerkingsvoorbeeld 8 korrek gedoen is en bewerkingsvoorbeelde 15 en 18 net voor bewerkingsvoorbeeld 9 gedoen is.

Bewerkingsvoorbeeld 18:

$^{-}5 - {}^{-}8 = 3$.

$8 + 5 = 13$; $5 - 8 = {}^{-}3$, daarom $^{-}5 - {}^{-}8 = 3$.

Dit is ´n pragtige voorbeeld van waar die patroonmatigheid met dieselfde getalle toegepas word om ´n bewerking se antwoord vas te stel.

Bewerkingsvoorbeeld 15:

$5 - {}^{-}8 = 13$

$5 + 8 = 13$. Die verskil tussen 5 en $^{-}8$ is 13.

Dit is weer ´n suiwer voorbeeld van aftrekking interpreteer as die verskil in grootte of plek van die getalle.

Die terugval na verkeerde strategieë vir hierdie st.5-leerlinge is normaal, want hulle is ´n bietjie oorweldig deur al die vreemde bewerkinge en slegs die kalmste en mees selfversekerde onder hulle kan regdeur kophou.

<u>Japie (14 : 0)</u>

Hierdie leerling gebruik by Taakkaart C2 (termometerkaart) die afbeelding van die termometer net by die laaste bewerking of verskuiwing, maar by Taakkaart B1 steun hy sterk op die termometer en verwys telkens daarna.

Sy herstel egter by bewerkingsvoorbeeld 2 :

$$^{-}8 - 3 = {}^{-}5, \textit{ want } {}^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8.$$

Sy besef haar fout en:

$$^{-}8 - 3 = {}^{-}11, \textit{ want } {}^{-}11 + 3 = {}^{-}8.$$

By optel gebruik sy eers analogie vir:

Bewerkingsvoorbeeld 10 : $^{-}4 + {}^{-}4 + {}^{-}4$

Bewerkingsvoorbeeld 11 : $^{-}5 + {}^{-}3$

Bewerkingsvoorbeeld 12 : $^{-}3 + {}^{-}5$.

By bewerkingsvoorbeeld 5 : $3 + {}^{-}5$

6 : $5 + {}^{-}11$

maak sy die numeries kleinste getal nul, deur sy optellings-inverse by te tel wat sy by die negatiewe getal "leen" en skryf dit wat oorbly as antwoord neer.

Bewerkingsvoorbeeld 5 : $3 + {}^{-}5 = {}^{-}2$, *$3 - 3 = 0$ en daar bly $^{-}2$ oor.*

Bewerkingsvoorbeeld 6 : $5 + {}^{-}11 = {}^{-}6$, *$5 - 5 = 0$ en daar bly $^{-}6$ oor.*

By die makliker gevalle, $a + {}^{-}b$; $a > b$ bv. $10 + {}^{-}7$ trap sy klei en gebruik snaakse strategieë.

Dus, weer eens 'n leerling wat tot 'n hoë vlak van formele denke in staat is as die verskillende tipes bewerkings net gesistematiseer word.

Danie (12 : 11)

Hierdie leerling beantwoord Taakkaart A nr.4

4 - 9, as 4 - 9 = $^-5$,

want sê nou dis 4 grade C en dit word

9 grade C kouer, dan is dit $^-5$ grade C.

By Taakkaart B1, slaan hy onmiddellik oor na die skuldbegrip. Die onderhoudvoerder kry die idee dat die begrip negatiewe getal, asook die negatiewe getal as bewerkingsgetal, alreeds by hierdie leerling geïnternaliseer is en dat hy na praktiese inkledings gryp om sy antwoorde aan die onderhoudvoerder te verifieer.

Hieronder volg 'n paar voorbeelde van hoe hy die skuldbegrip aanwend:

Bewerkingsvoorbeeld 15: 5 - $^-8$ = $^-3$, *jy skuld R8 en betaal R5.*

Hy hanteer aftrek hier as kommutatief, vandaar die verkeerde antwoord.

Bewerkingsvoorbeeld 16: $^-5$ - $^-2$ = $^-3$, *Jy skuld R5 en betaal R2.*

Let daarop dat - $^-2$ geïnterpreteer word as **betaal R2.**

Bewerkingsvoorbeeld 18: $^-5$ - $^-8$ = +3, *Jy skuld 5 en betaal R8, dan het jy nog R3.*

Bewerkingsvoorbeeld 2 : $^-8 - 3 = $ *11*

maar as hy begin verduidelik, verander hy dit na

$^-8 - 3 = {}^-5$, *as jy R8 skuld en jy trek 3 daarvan af, dan betaal jy R3, dan skuld jy R5, dis* $^-5$.

Hier sien ons geïllustreer dat wanneer met praktiese inkledings gewerk word, woordspeling die kind op 'n dwaalspoor kan bring en foute tot gevolg kan hê.

BRONNELYS

Bell, A. (1983). Direct Numbers and the Bottom Up Curriculum. Mathematics Teaching. 102.

Brownell, W.A. (1956). Meaning and Skill - Maintaining the Balance. The Arithmetic Teacher. 15.

Buys, K. (1984). Uitstapje naar de wereld der negatieve getallen. Studiestuk. Enschede, Nederland: Stichting voor de Leerplanontwikkeling, Enschede.

Fremont, H. (1969). How to teach Mathematics in Secondary Schools. Philadelphia: Saunders.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht - Holland: D. Reidel.

Ginsburg, H.P. (1977). Children's Arithmetic. New York: D. van Nostrand Co.

Ginsburg, H.P., Kossan, N.E., Schwartz, R., & Swanson, D. (1983). Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking. In Ginsburg, H.P. (Red.), The Development of Mathematical Thinking. New York: Academic Press.

Goffree, F. (1985). Een formele benadering van negatieve getallen, een experiment met lagere schoolkinderen. Studiestuk. Enschede, Nederland: Stichting voor de Leerplanontwikkeling, Enschede.

Human, P.G. (1984). Die Onderrig van heelgetalle. Ongepubliseerde kursusaantekeninge vir die indiens-opleiding van Wiskunde-onderwysers van die Kaaplandse Onderwysdepartement. Stellenbosch: Instituut vir Wiskunde- en Wetenskaponderwys, Universiteit van Stellenbosch.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol. In R. Karplus (Red.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Berkely, California: University of California.

Küchemann, D. (1982). Object Lessons in Algebra? Mathematics Teaching. 82.

Lankford, F.G. Jr. (1974). What can a teacher learn about a pupil's thinking through oral interviews? The Arithmetic Teacher. 21.

Murray, J.C. (1984). Leerlinge se bemeestering van Heelgetalrekenkunde. Studies oor Wisknde-didaktiek 1. Stellenbosch: Eenheid vir Navorsing oor Wiskunde-onderwys, Universiteit van Stellenbosch.

Murray, J.C. (1984). Taal en Wiskunde. Studiestuk. Stellenbosch. Eenheid vir Navorsing oor Wiskunde-onderwys, Universiteit van Stellenbosch.

Opper, S. (1977). Piaget's Clinical Method. The Journal of Children's Mathematical Behavior. 4 (1).

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. The Mathematics Teacher. 74.

Sinclair, H. (1983). Young Children's acquisition of language and understanding of mathematics. In M. Zweng (Red.), Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. Boston: Birkhäuser.

Skemp, R.R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. Mathematics Teaching. 77.

Van Hiele, P.M. (1973). Begrip en Inzicht. Muusses Purmerend.

bewerkingsvoorbeeld 8 ($^-5 + {}^-3 = 8$),

gebruik. *Ondertoe gewerk, dis ʼn* $^-3$.

Hieruit en ook uit bewerkingsvoorbeeld 20:

$^-12 - {}^-4 = {}^-8$ *Dis ʼn gewone aftreksom, gaan net op,*

blyk dat sy nie ʼn grootte-orde probleem het nie. Dis duidelik dat haar hantering van + $^-$ en - $^-$ totaal intuïtief is.

<u>Elanie (13 : 1)</u>

Sy gebruik die toetsmetode om haar antwoorde te verky. Die manier waarop sy dit aanwend dui op ʼn gevorderde vlak van formele denke.

Voorbeelde: Bewerkingsvoorbeeld 1: $5 - 8 = {}^-3$. *Want* $^-3 + 8 = 5$.

Bewerkingsvoorbeeld 20: $^-12 - {}^-4 = {}^-8$

$^-4 + {}^-8 = {}^-12$

Bewerkingsvoorbeeld 15 : $5 - {}^-8 = {}^-3$

Hier dink sy baie lank en sê dan:

Ek het 5 en trek af, dus moet ek ʼn kleiner getal kry.

Die onderhoudvoerder vermoed dat sy met die toetsmetode $^+13$ wou skryf, maar dat sy grootte-orde probleme gehad het, omdat dit ʼn aftreksom is.